目　录

零

数学命题与证明

0-1 命题

我们不打算对“真”与“假”的意义进行哲学式的讨论，而是认为这两个字的意义是已知的. 我们将命题定义为任一组符号，这组符号构成一个有意义的论断，且具有性质：这一论断确切地为真或确切地为假，但不能既真又假.

例 1.1 下列三项各为一命题：

(*a*) 乔治·华盛顿是个卖国贼.

(*b*) $2+2=4$.

(*c*) 月亮是绿乳酪制成的.

例 1.2 下列三项都不是命题：

(*a*) 所有的 *minsy* 从前都是 *borogrove*†.

(*b*) 小偷，站住!

(*c*) 这个命题是假的.

可以用几种不同的方式把几个命题组合起来而构成新的命题. 由于这种组合在数学里经常出现，所以有必要把它们弄明白，以便认识特定的句子或句子组所表达的信息.

否定也许是最简单的命题演算. 如果 p 为任一命题，我们可以建立一组符号“非 p”. 如果我们约定：在与 p 为假完全相同的条件下，“非 p”为真，并且在和 p 为真完全相同的条件下，“非 p”为假，那么“非 p”这组符号就成为一个命题. 这是因为 p 是作为一

---

†原文“*All minsy were the borogroves*”出自《爱丽丝奇遇记》，该书作者爱生造字. 其中 *minsy* 和 *borogrove* 乃是英语中不存在的字. 在数学中是认为无意义的. ——译者注

个命题给出的，它不是真就是假，不会既真又假，而上面所提到的约定赋予了“非 p”这同样的性质，所以“非 p”就成为一个命题.

这个约定归结为图 1.1. 其中字母“T”与“F”分别用来表示“真”与“假”. 因为这个图表说明了在什么情况下命题“非 p”为真，所以称它为“非 p”的真值表. 当然，此表也说明了“非 p”为假的那些情况.

p	非 p
T	F
F	T

图 1.1 “非 p”真值表

这里只提一下与否定有关的另一件事. 根据语法†，一个命题 p 的否定式可由在命题 p 内部的某处添上一个“非”†† 字来构成. 也有可能用其它的迂回说法，如象使用“这是假的……”这种句式，然而这些都很容易看出来，不会造成混乱的.

否定演算是作用于单个命题的. 图 1.2 描述两种演算，它们可作用于两个命题而产生另一个新命题. 若 p 是一个命题且 q 也是一个命题，我们可以建立一组符号“p 并且 q”以及另一组符号“p 或 q”. 如果我们做如图 1.2 中给出的真与假的约定的话，这两组符号都成为命题. 以上所说的基本上是我们所熟悉的，但有一点必须加以注意，即“或”(*or*)这个词在英文的一般用法中有两种不同的意思. 有的时候，它意味着两种可选择的情况中，恰有一种(两者不能同时均可)发生，有的时候，它意味着两种可供选择的情况中至少一种发生. (例如：我要和玛丽或珍妮去跳舞. 当我教课时，我总是穿着上衣或结个领带.)在数学里以“或”的第二种意思做为

†此指英语语法.

††原文为 “*not*”. ——译者注

其标准意义.即我们将总是在“两种可供选择的情况中至少一种发生”这个意义上使用“或”这个词,这正象图 1.2 中所表示的那样.

p	q	p 并且 q	p 或 q
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

图 1.2 “p 并且 q”和“p 或 q”的真值表

此外还有两种特别重要的演算可作用于两个命题.这两种演算给出的结果分别为:“若 p 则 q”和“p 当且仅当 q”.它们由图 1.3 描述出来.由于许多数学定理都是用这两种形式之一表达的,所以仅仅为了在尝试证明之前理解一个定理的意义(或理解某人的证明),就需要知道这两种形式.

p	q	若 p 则 q	p 当且仅当 q
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	T

图 1.3 “若 p 则 q”与“p 当且仅当 q”的真值表

可认为命题“若 p 则 q”有以下的要求:在每一使命题 p 为真的情况下,它要求命题 q 也为真.这就是这个命题的全部要求.特殊的是,在每一使命题 p 为假的情况下,这一命题不要求任何东西.要强调的是命题“若 p 则 q”既不表明命题 p 为真,也不表明存在一个过程,使人能够从 p 出发,通过一定的演算而最终达到 q.此命题所表明的只是:每当 p 为真时 q 也为真.

例 1.3 下列命题为真:

(a) 若 $2+2=5$,则 $3+4=7$.

(b) 若 $2+2=5$,则 $3+4=6$.

(c) 若 $2+2=4$，则 $3+4=7$.

例 1.4 下列命题为假：

(a) 若 $2+2=4$，则 $3+4=6$.

任一具有"若 p 则 q"形式的命题称为*蕴涵*(*implication*)。在英语中，这种命题可以用多种不同的方式来表达，图 1.4 给出了其中几个常用的表达方式。读者应该能够认识：这些表达方式中的每一个都与命题"若 p 则 q"表达同样的意思。

建议每个学生都要非常熟悉每个特定命题的各种不同的形式。这样他就能以这些形式做为比较的标准，去决定任一其他这样命题的意义，这命题具有与他的标准形式之一相同的表达形式。例如考虑命题"如果我有 1000 美元，那么我就能与 *Yvette* 约会。"

(a) 若 p 则 q
(b) p 是 q 的充分条件
(c) q 是 p 的必要条件
(d) p 蕴涵 q
(e) q 由于 p
(f) p 仅当 q
(g) q 除非"非 p"
(h) q 若 p

图 1.4　相同蕴涵的不同表达式

(a) p 当且仅当 q
(b) p *iff* q†
(c) p 是 q 的充分必要条件
(d) 若 p 则 q，反之亦然
(e) q 当且仅当 p

图 1.5　等价命题的不同表达式

†简略写法"*iff*"意指"当且仅当"("*if and only if*")。这种写法经常被使用，以便获得比用其他形式容易读的效果。——原著者注

图 1.3 中的最后一列中命题“p 当且仅当 q”是“p 若 q 并且 p 仅当 q”的一个简略表达方式，参照图 1.4的等价形式表，此命题可表达为“若 p 则 q，并且若 q 则 p.”如图 1.3 所示，这个命题所说的是：p 与 q 具有相同的真值，意即：或者两者皆真，或者两者均假. 两个具有相同真值的命题 p、q 称为等价. 若 p、q 为等价并且想要证明 p 为真，那么只须证明 q 为真就行了. 与蕴涵一样，等价命题有几种表达方式. 图 1.5 列出了那些最常用的形式.

将命题“若 p 则 q”和命题“若非 q 则非 p”各作一真值表，很容易看出这两个命题是等价的. 由此，若把命题“若非 q 则非 p”的各种表达形式包括进去，图 1.4 所示的表达形式数目就得增加一倍.

在数学中我们经常考虑诸如 $x^2>-1$ 这种含有一个或多个变量的表达式. 这种表达式不是命题，因为我们不能说出这种表达式是真或假，除非我们了解所含变量的数值是怎么回事(若 x 代表“狗”，我们所举的例子就成为无意义的). 当这些变量有某些适当的辅助条件时，这种表达式就成为句子. 这些辅助条件称为量词(*quantifier*). 我们将对量词的两种不同类形感兴趣. 就例子 $x^2>-1$ 来说，我们能够得到两个句子：

$$\text{对所有的实数 } x,\ x^2>-1 \tag{1}$$

和

$$\text{有一个实数 } x,\text{ 使得 } x^2>-1. \tag{2}$$

这两个句子都为真. 注意：若我们考虑的不是实数而是复数的话，那么第一个句子为假，但第二个句子仍为真. 显然句子(1)能够表达为：如果 x 为一实数，则 $x^2>-1$. 有的时候则要求读者从上下文或经验出发去理解量词所包含的部分条件. 这样，如果上文指出考虑的是实数时，上面的句子(1)可简单地写作：

$$\text{对所有的 } x,\ x^2>-1.$$

其他三种具有完全相同的意义的形式是：

对任一 x, $x^2>-1$.

对每个[†] x, $x^2>-1$.

对每一[††] x, $x^2>-1$.

同样，在适当的上文中，句子(2)可写为：

有一个 x 使得　$x^2>-1$.

其他三种具有完全相同的意义的形式是：

存在一个 x, 使得 $x^2>-1$.

对某个 x, $x^2>-1$.

至少有一个 x, 使得 $x^2>-1$.

将一个量词作用在含有一个变量的表达式，由此而构成句子，似乎不会引起混乱．但是学生们经常在理解上的困难是：对于同一个表达式相继地使用了两个不同的量词，所表示的意思是什么？有一个协定(下面将要说明)，它非常有助于解释这种表达式．例如，考虑下面两个句子：

对任何正数 x, 有一个正数 y, 使得

$$x^2-y^2>0,$$

有一个正数 y, 使得对任何正数 x, 有

$$x^2-y^2>0,$$

这两个命题是不相同的．我们约定：句子中变量的顺序规定着我们对变量的值进行选择(或决定)的次序．由此，在上面的第一个句子中，x 先被提及，然后再提到 y；这就意味着先选择 x 的值，然后，在知道了对 x 的选择后，再对 y 的值加以选择．当然，这两个选择还有另一个不同之处，即我们必须对所有可能的 x 值加以验证，而只须验证一个 y 值；且 y 的值可随 x 值的改变而改变．上面的第一个命题为真，这是很容易看出的．不管正数 x 如何选取，我们可选 y

---

†原文为 *for each*.

††原文为 *for every*.

为$\frac{1}{2}x$；这个y值是个正数，并且可有：

$$x^2-y^2=x^2-\frac{1}{4}x^2=\frac{3}{4}x^2>0.$$

现在我们来考虑上述的第二个句子．在这个句子里，先提及y再提到x，因此y值必须先选定，在选定y值之后再选取x的值．再则，虽然一个y的值就够了，但必须验证所有可能被选取的x的值．这第二个命题是假的．因为不可能找出一个y值，使得当y等于此值并保持不变时，将所有可能的x值代入式子x^2-y^2，使$x^2-y^2>0$恒为真．事实上，假如有人建议用正数y_0做为y的一个值，那么我们一定会考虑x值中的一个值$\frac{1}{2}y_0$，而由这两个值就有：

$$x^2-y^2=\frac{1}{4}y_0^2-y_0^2=-\frac{3}{4}y_0^2<0.$$

上面的例子说明包含量词的命题的证明过程．注意，如果我们考虑的是一个具有形如"对所有的x……"的命题时，为了证明这个命题为真，就需要依次考虑x的每个值，或者给出一个对每个许可的x值都有效的讨论．在证明这个命题为假时，则只须找出一个x的许可值不满足命题中由虚点所表示的条件就行了．这样的x值称为命题的*反例*．

如果我们考虑形如"有一个x，使得……"的命题，那么为了证明此命题为真，只要给出一个x的许可值作为例子，使它满足由虚点所表示的条件就行了．为了证明此命题为假，就需要考虑每一个x的许可值．

还有一点需要注意．情况有时候是这样的，假定量词可以从上下文中看出来，而不把它写出来．例如，等式

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

可能应该理解为：

$$对所有的正整数\ n,\ 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

关于与变量出现的顺序相关的约定以及关于量词命题的证明，习题中将给出进一步的练习．学生必须透彻地理解这一约定，因为这整本书里处处用到它(注意：并不是所有的作者都接受这一约定)．

习题

1. 下列哪些是命题？在这些命题里哪些为真？对某些题可能需要由经验或句子的上下文做出某些假设，如果需要，就做些假设．但记住，这些假设是由你作出来的．

   (a) $1+2=3$.

   (b) $\triangle+\square=\bigcirc$.

   (c) 我漂亮．

   (d) 多好啊！

   (e) 我漂亮或者我丑．

   (f) 我漂亮并且我丑．

   (g) 若我漂亮则我丑．

   (h) 我漂亮当且仅当我丑．

   (i) π 的十进小数点后第 10,000 位的数字为 3.

   (j) π 写成十进小数时，在它的数字里有无穷个 3.

   (k) 如果那是真的，我就是猴子的叔叔．

   (l) 如果火星上有生命，那么这门课程就很有趣了．

   (m) 让那里平静．

   (n) 我身高七英尺多除非我二百多岁．

   (o) 身高超过七英尺是年过二百的充分条件．

   (p) 只有七英尺高的人才二百多岁．

   (q) 所有七英尺高的人都二百多岁．

   (r) 若 $2+2=4$，则不是 $3+2=5$ 就是 $3+6=7$.

   (s) 不是 $3+6=7$，就是若 $2+2=4$，则 $3+2=5$.

(t) 若 $2+2=4$, 则 $3+2=5$ 且 $3+6=7$.

(u) $3+6=7$, 且若 $2+2=4$, 则 $3+2=5$.

(v) 若 $3+6=7$, 则 $2+2=5$ 且 $3+2=5$.

(w) $3+2=5$, 且若 $3+6=7$, 则 $2+2=5$.

(x) 若 $2+2=4$ 且 $3+6=7$, 则 $2+2=5$.

(y) 若 $2+2=4$ 或 $3+6=7$, 则 $2+2=5$.

(z) 若 $2+2=4$ 或 $3+6=7$, 则 $3+2=5$ 且 $2+2=5$.

2. 准确说出下列情况中命题的意义并决定命题为真或为假. 利用本书中所解释的关于出现顺序的约定并注意你自己从经验或上下文中所加的假设.

(a) 每个男人都有一个好妻子.

(b) 有一个对每一个男人都是完美的妻子.

(c) 对每个 x, 有一 y, 使得 $x+y=5$.

(d) 有一个 y, 使得对每个 x 有 $x+y=5$.

(e) 对每个 x, 有一 y, 使得 $xy=x$.

(f) 有一个 y, 使得对每个 x 有 $xy=x$.

(g) 每一天都有一天跟在它后面.

(h) 有一天跟在每一天的后面.

(i) 对每个数字 x, $(0<x<1)$, 有一数字 $y(1<y<2)$, 使得 $x+y<2$.

(j) 有一数字 $y(1<y<2)$, 使得对每一数字 $x(0<x<1)$ 有 $x+y<2$.

(k) 有一数字 $y(1<y<2)$, 使得对每个数字 $x(0<x<1)$ 有 $x+y\leqslant 2$.

(l) 每个父亲有一个孩子, 使得: 若孩子超过 10 岁, 则父亲超过 20 岁.

(m) 有一个孩子使得: 对每个父亲, 若这个孩子超过 10 岁, 则父亲超过 20 岁.

(n) 有一个孩子, 使得: 若这个孩子超过 10 岁, 则每个父亲都超过 20 岁.

(o) 对每一个 $x(0<x<1)$ 有一个 $y(1<y<2)$, 使得: 若 $0<z<y$, 则 $x+z<2$.

(p) 有一个 $y(1<y<2)$, 使得: 对每个 $x(0<x<1)$, 若 $0<z<y$, 则 $x+z<2$.

(q) 对每个实数 x_0 和每个 $\varepsilon>0$, 有一个 $\delta>0$, 使得: 若 $|x-x_0|<\delta$, 则 $|x^2-x_0^2|<\varepsilon$.

(r) 对每个 $\varepsilon>0$, 有一个 $\delta>0$, 使得: 对每个实数 x_0, 若 $|x-x_0|<\delta$, 则 $|x^2-x_0^2|<\varepsilon$.

(s) 对每个实数 x_0 和每个 $\varepsilon>0$, 有一个 $\delta>0$, 使得: 若 $|x-x_0|<\delta$, 则 $|2x-2x_0|<\varepsilon$.

(t) 对每个 $\varepsilon>0$ 有一个 $\delta>0$, 使得: 对每个实数 x_0, 若 $|x-x_0|<\delta$, 则 $|2x-2x_0|<\varepsilon$.

*3. 令 p, q 和 r 为任意给出的命题, 证明下列的每一命题与其余的每一个等价. (提示: 利用真值表表示, 如果这些命题中的任何一个为真, 则所有命题为真, 并且若任何一个为假, 则全部为假.)

(a) 若 p 则 q.

(b) 若非 q 则非 p.

(c) 若 p 并且非 q 则 q.

(d) 若 p 并且非 q 则非 p.

(e) 若 p 并且非 q 则 r 并且非 r.

0-2 证明

数学上的很多定理都可以写成蕴涵的形式: 若 p 则 q. 本节我们阐述证明这种蕴涵的几种可能方法. 我们只讨论一般证明方法并且假定学生们都熟悉证明中每一步骤的有效性.

p 与 q 为给定的命题. 我们知道"若 p 则 q"当然是一个命题. 那么我们怎样才能够证明它是一个真命题呢? 图 1.3 的真值表中的第三列说明没有必要去考虑 p 为假的任何情况, 因为在那些情况下, "若 p 则 q"恒为真, 不管所用的 q 是什么命题. 由此, 我们可把注意力限制在 p 为真命题的情况, 即是说可以从命题 p 为真这个假设出发. 而在这种情况下, 图 1.3 表明了蕴涵"若 p 则 q"只能在 q 为真的相同情况下才能为真. 也就是说, 我们希望能得到 q 为真的结论. 随之我们也就明白了, 证明蕴涵"若 p 则 q"的一个可能方法是, 从假定命题 p 为真出发而演释出 q 为真. 在这一演释过程中, 任何有效的步骤都可以使用. 一个由这种方法完成的证明称

为蕴涵“若 p 则 q”的直接证法(*direct proof*).

例 2.1 给出一个蕴涵“若 p 则 q”的直接证明：若 n 是一个奇整数，则 n^2 为一奇整数.

证明：由假设，我们知道 n 是一个奇整数，因此 $n-1$ 是一个偶整数. 由此，$\frac{1}{2}(n-1)$ 是一个整数，设它为：

$$\frac{1}{2}(n-1)=m,$$

对 n 解出这个方程，得

$$n=2m+1,$$

方程两边同时平方，得

$$n^2=(2m+1)^2=2(2m^2+2m)+1.$$

这最后的形式表明 n^2 是一个奇整数. 证明完毕. ≪

我们已经提醒过，如果两个命题等价，那么对其中一个命题的证明也就是对另一个命题的证明. 第 0-1 节中的习题 3 列出了 5 个命题，其中的每一个都与蕴涵“若 p 则 q”等价，且都具有蕴涵的形式，因而我们只须给出这些蕴涵中任一命题的一个直接证明就可以了. 第0-1节中习题 3 从(*b*)到(*e*)的蕴涵中任何一个命题的一个直接证法称为蕴涵“若 p 则 q”的一个间接证法 (*indirect proof*). 这样的证法(尤其是那些基于形如(*b*), (*d*)或(*e*)的蕴涵的证明)有时也称为矛盾证法(*proofs by contradiction*). 有各种特殊的名称用来称呼这些间接证法的特殊型式，在此我们不去详谈.

例 2.2 给出下述蕴涵的一个间接证明：若 n 是一个整数，它的平方为偶(整)数，则 n 为偶数.

证明：(用矛盾证法)：令 p 为命题：

n 为整数，其平方为偶数.

令 q 为命题：

n 为偶数.

用这些记号，要求我们给出一个蕴涵"若 p 则 q"的间接证明. 我们将给蕴涵"若非 q 则非 p"一个直接证明. 将这个蕴涵完全写出来就是:

若 n 不是一个偶数，

则 n 不是一个平方为偶数的整数.

由假设，我们有: n 不是一个偶数. 我们考虑两种情况.

情况 1. n 不是一个整数. 在这种情况下，显然 n 不是一个其平方为偶数的整数，因为 n 根本不是整数.

情况 2. n 为一个奇数. 在这种情况下，n^2 也是一个奇数(例 2.1); 所以 n 也不是一个其平方为偶数的整数. ≪

注意: 例 2.2 的证明中，大部分材料通常是被省略，而留给读者去补充的. 完整的证明通常写成如下: 证明(矛盾证法): 设 n 为一奇数，则有 n^2 也是奇数(例 2.1). 因此得证. ≪

读者应看出，在这较短的叙述中有几个步骤被省略了. 要求读者能补充这些步骤.

例 2.3 证明$\sqrt{2}$是无理数.

证明(矛盾证法): 设$\sqrt{2}$为有理数，则它可写成一个最简分数，令之为

$$\frac{n}{m}=\sqrt{2},$$

其中 n 和 m 为整数. 它们除了 1 以外没有其他公因数. 因此，$n=\sqrt{2}m$，或者，若等号两边同时平方即得

$$n^2=2m^2.$$

由此，n 为一个其平方为偶数的整数，由例 2.2 知 n 为偶数. 令 $n=2r$，并把它代入上面的方程式中，我们可看出 $(2r)^2=2m^2$ 或写成

$$2r^2=m^2,$$

但此式表明m为一个其平方为偶数的整数；因此m为偶数. 这与命题"n与m除1以外没有其它公因数"相矛盾. ≪

这个证明的讨论，我们留作为练习(习题11).

习题

习题1至10的说明：证明问题1—10的每个蕴涵并讨论你的证明. 它是直接的还是间接的证明？若是间接的，那么所使用的是第0-1节问题3中的哪一种形式？试给出同一蕴涵的几个不同的证明. 是否有一个证明看起来容易或自然些？注出你由经验或上下文所做的假设.

1. 若 $x^2-3x+2=0$，则 $x=2$ 或 $x=1$.
2. 若 $x=3$，则 $x^2+2x-15=0$.
3. 若 $x^2+4x+1=0$，则 $x<5$.
4. 若 $x>0$，则 $x^2-2x+2>0$.
5. 若 AB，CD 为同一平面内的两直线，且每条直线都垂直于此平面中一给定直线，则 AB 与 CD 平行.
6. 若一三角形的两边相等，则这两边所对的两角相等.
7. 若一三角形之两边不等，则这两边所对的两角不等.
8. 若 $y=x^2$，$1<y<4$，则 $x<2$.
9. 若 $x^2+y^2+z^2=0$，则 $x=0$，$y=0$，$z=0$.
10. 若 $x=2$，$x^2+2x^3y-3y^4=0$ 则 $y\neq x$.
11. 讨论例2.3的证明. 它是直接的还是间接的或是其他证法的？(提示：先将所证的定理表述为一蕴涵.)
12. 检验几个数学定理的证明. 这些定理是蕴涵的形式吗？若不是，它们能很方便地表述为蕴涵吗？这些证明是直接的还是间接的？它们使用了第0-1节问题3中的哪种形式？(也许用到了其他的形式，并不是所有可能的形式都列在第0-1节问题3中的.)

0-3 数学归纳法

第0-2节中所讨论的证明方法对证明任何蕴涵都是行之有效的. 当然一种方法可能比另一种方法更方便，而我们也可能试用

了所有的方法却仍不能得到证明，但是每一个方法都是构成某种特定蕴涵的证明的一种可能性．本节我们将讨论一种证明方法，它只适用于一种非常特殊类型的定理．这种方法相当重要，因为这种特殊类型的定理在数学中经常出现．

我们考虑一个定理T和一组无限个定理$T_1, T_2, T_3, \cdots\cdots$，使得：定理$T$为真，当且仅当定理$T_1, T_2, T_3, \cdots\cdots$的每一个均为真．即：$T$等价于

T_1并且T_2并且T_3并且……

这一类型的定理T经常(但不总是)表明，某个包含着变量n的条件被满足，其中n为正整数．

例 3.1 定理

T：若n为一整数，

$$\text{则 } 1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

它可表示为：

T_1：　$1=\frac{1\cdot 2}{2}$，

并且T_2：　$1+2=\frac{2\cdot 3}{2}$，

并且T_3：　$1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2}$，

并且……　．

我们如何才能证明这样的定理呢？定理T可表述为一个蕴涵的形式(例 3.1)，因而也许可以采用第 0-2 节中的某一种方法．但是因为T又可以表述为

T_1并且T_2并且T_3并且……，

因而就有另外一种可行的方法．这种方法称为**数学归纳法** (*mathematical induction*)．我们将首先说明，用数学归纳法给出证明

时所必须履行的步骤，然后我们按这些步骤证明例 3.1 的定理，用以说明这种方法. 然后，说明采用这些步骤作为定理 T 的证明之所以近似合理的一些理由. 一个数学归纳法的证明中有两个步骤:

步骤 1　证明定理 T_1.

步骤 2　证明蕴涵: T_k 蕴涵 T_{k+1}.

步骤 1 的说明: 任何可应用的方法都可用来证明定理 T_1. 通常的情况是 T_1 乃是一个很简单的结果，它很容易证得或者它也许是已知的.

步骤 2 的说明: 对与步骤 2 有关的两点需予以注意. 第一，我们要证明的是蕴涵“若 T_k 则 T_{k+1}”. 我们不关心 T_k 真假与否，而只关心每当 T_k 为真时必导至 T_{k+1} 亦为真. 证明这一蕴涵可使用第 0-2 节中的方法. 第二，我们必须确定我们所给出的对蕴涵“若 T_k 则 T_{k+1}”的证明对每一个正整数 k 都有效. 即我们必须同时证明下列的每个蕴涵:

若 T_1 则 T_2.

若 T_2 则 T_3.

若 T_3 则 T_4.

……………

当我们讨论采用步骤 1 和步骤 2 来证明定理 T 的近似合理性时，这一要求的必要性就很清楚了.

例 3.1(续) 证明若 n 为任意正整数，则

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

证明(数学归纳法): 在上面的例 3.1 中我们已经看到了，这一定理 T 可表示为 T_1 并且 T_2 并且 T_3 并且……. 所剩下的事是实现步骤 1 和步骤 2.

步骤 1　定理 T_1 是:

$$1=\frac{1\cdot 2}{2}$$

这是完全明显的.

步骤 2　我们必须证明蕴涵"若 T_k 则 T_{k+1}". 其中 T_k 是命题:

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

T_{k+1} 是命题

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

我们将给出这个蕴涵一个直接证明. 因此，我们把注意力放在 T_k为真的情况上. 亦即：我们从假设（称做*归纳假设* (induction hypothesis)）

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

出发. 但由此可得

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

因而这个蕴涵得证. 要注意的是此证明对每一正整数 k 都有效. ≪

现在我们来研究一个有趣的问题：为什么承认步骤 1 和 2 作为定理 T 的证明是合理的? 严格地说，步骤 1 和 2 确实构成对定理 T 的一个证明, 这总是当作一个公理而被接受的. 尽管如此, 每个学生都应当对步骤 1 和 2 所完成的事情有一种直觉的感受，这是很重要的. 因此，我们将讨论承认这两个步骤为一个证明的合理性, 而不是仅仅把它像公理似地叙述为: 我们要做什么.

我们知道定理 T 为真当且仅当 $T_1, T_2, T_3, \cdots\cdots$ 中的每一个均为真. 那么步骤 1 和 2 给了我们关于这些定理的一些什么信息呢? 让我们把由步骤 1 和 2 证明为真的那些定理列成一个表. 步

骤 1 表明 T_1 为真，于是我们将 T_1 列在表上．我们在步骤 2 所证明的一部分是

若 T_1 则 T_2;

这样，由于 T_1 已在表上，可以再加上 T_2．但是我们在步骤 2 中所证明的一部分是:

若 T_2 则 T_3;

这样，由于 T_2 已在表上，可以再加上 T_3．同样地，我们在步骤 2中所证明的一部分是:

若 T_3 则 T_4;

这样，T_4 就可以加进表里．……等等．因而，由步骤 1 和 2 证明为真的定理的表就包括了所有的定理 T_1，T_2，T_3，……，这就意味着定理 T 为真．

现在我们就明白为什么步骤 2 中所给出的证明必须对 k 的每个正整数值均有效是很重要的了．为了确保我们的表包含所有的定理 T_1, T_2, T_3，……我们必须连续使用下列每个蕴涵

若 T_1 则 T_2.

若 T_2 则 T_3.

若 T_3 则 T_4.

……………

这样，我们必须确保步骤 2 中的证明的确证明了这每一个蕴涵．亦即：它必须对 k 的每个正整数值都有效．

例 3.2 若 n 是大于 3 的任意整数，则 $2^n<n!$

证明(数学归纳法)：我们来考虑下面的值 $n=4, 5, 6$，……，于是我们所要证明的定理 T 就轻易地分解为下面一组无穷多个定理:

$$T_1: 2^4<4!$$

$$T_2: 2^5<5!$$

$$T_3: 2^5 < 6!$$

…………

$$T_k: 2^{(k+3)} < (k+3)!$$

$$T_{k+1}: 2^{(k+4)} < (k+4)!$$

由此，我们的定理就变成可以用数学归纳法证明的了.（在数学归纳法的证明中，并不给出这些开始步骤，但学生应该明白一个可用数学归纳法来证明的定理的每一情况.）

步骤 1　我们必须证明 $2^4 < 4!$，但这正是命题 $16 < 24$，它显然为真.

步骤 2　我们必须证明蕴涵

$$若\ 2^{k+3} < (k+3)!,\ 则\ 2^{k+4} < (k+4)!$$

我们将给出一个直接证明．由归纳法假设我们有

$$2^{k+3} < (k+3)!$$

但是对任意正整数 k，$2 < k+4$．把这两个不等式的两边各自对应相乘，我们就得

$$2 \cdot 2^{k+3} = 2^{k+4} < (k+3)!(k+4) = (k+4)!$$

这就是所要求证的．≪

还有一种稍为不同的证明程序，它也是我们所讨论的这一类型定理所采用的一种证明方法．这种方法也叫做数学归纳法．我们将它称为第二类型数学归纳法，以区别于前面所讲的方法（类型 1）．我们将说明这种证明过程必须履行的步骤，并以下面例 3.3 中实现的这些步骤来说明这种方法．采用这一过程来做为一个证明，其合理性将当做练习（习题 12）去讨论．在讨论到地图时我们要用到这两种归纳法.

令 T_1, T_2, T_3，……为一组无穷多个定理，并且令 T 为一定理，它为真当且仅当定理 T_1, T_2, T_3，……中的每一个均为真．下列两个步骤可用来作为定理 T 的一个证明.

步骤 1　证明定理 T_1.

步骤 2　证明蕴涵.

若 T_1 并且 T_2 并且 T_3 并且……并且 T_{k-1}，则 T_k.

步骤 1 的说明：这与第一类归纳法中步骤 1 相同．可以证明，步骤 1 在第二类数学归纳法中实际上是不必要的，但这里我们不去讨论这个问题．(注意：在第一类归纳法中步骤 1 是必要的).

步骤 2 的说明：同样地，步骤 2 是证明某个蕴涵．我们不考虑单个的定理 T_1, T_2 等等是否为真，步骤 2 中所要做的是证明这里所说的蕴涵为真．对于第一类归纳法，必须注意我们对步骤 2 的蕴涵所给出的证明要对 k 的每一个正整数值有效．将这个步骤 2 与第一类归纳法中的步骤 2 作比较，就可以看出：在第一类中，我们由假设每个定理紧前的一个定理为真而证明了定理 T_1，T_2，T_3，……(除去第一个)中的每个定理；在第二类中，我们由假设每个定理前面的所有定理为真来证明每个定理.

例 3.3　若 n 是大于 1 的整数，则 n 为一质数或者是可表示为质数的积.

证明(数学归纳法)：我们将使用第二类归纳法．学生应该使自己明白，这是一个适用数学归纳法证明的定理.

步骤 1　考虑 $n=2$，因为 2 是一质数，所以定理在这种情况为真.

步骤 2　考虑任意整数 $n_0>1$．由归纳法假设，适合 $1<m<n_0$ 的每个整数 m，必是一质数或者为质数之积．必须证明 n_0 是一个质数或者是质数之积．此证明有两种情况.

情况 1　数字 n_0 是一个质数．在这种情况下，步骤 2 的蕴涵显然为真.

情况 2　数字 n_0 不是质数．在这种情况下，n_0 有一个正整数因子 p，它适合 $1<p<n_0$．这样，$n_0=p\cdot q$，其中每个 p 和 q 都是大

于 1 且小于 n_0 的整数．由归纳法假设，每个 p 和 q 或者是一个质数或者是质数之积．所以 n_0 是质数之积．≪

习题

习题 1 到 11 的指南：用数学归纳法证明问题 1 到 11 的每一结论．在每个情况中，哪一类的归纳法显得更自然？试不用归纳法证明每一结论．

1. 若 n 为一任意正整数，则

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

2. 若 n 为任意非负整数，则 $2^n>n$．
3. 在任意 n 边凸多边形中，内角和为 $(n-2)180°$．（提示：利用平面几何的一个定理：三角形内角和为 180°）
4. 令 n 为正整数，任一含有 n 个实数的集合中必有一最大元素．
5. 对任一正整数 n，

$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2)=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7).$$

6. 若 n 为大于 1 的整数，则在平面上 n 条不同直线相交的交点数最多是 $\frac{1}{2}n(n-1)$．
7. 若 n 为任一正整数，则 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$．
8. 若 n 为大于 1 的整数，则 n 的质因数的个数小于 $2\log_6 n$．
9. 若 n 为非负整数，则 $n^2<4^n$（提示：不用归纳法先来证明对任一正整数 n，$2n+1<3n^2$）．
10. 若 n 为任意正整数，则 $a-b$ 是 a^n-b^n 的一个因子．[提示：$a^n-b^n=(a^n-ba^{n-1})+(ba^{n-1}-b^n)$]．
11. 若 n 与 m 为任意正整数，证明存在一非负整数 q 和一整数 r，使得 $0\leqslant r<m$ 且 $n=mq+r$．并证明整数 q 和 r 唯一地决定于 n 和 m．
12. 讨论采用第二类型数学归纳法的过程做为对定理 T 的证明的合理性．
13. 讨论下面（假的）定理的证明：若 n 为任意正整数，S 是确切包含 n 个实数的集合，则 S 中的所有数字相等．

证明（归纳法）：步骤 1　若 $n=1$，结果是明显的．

步骤2　由归纳法假设，当 $n=k$ 时结果为真；我们必须证明当 $n=k+1$ 时结果亦真．令 S 为任意恰好包含 $k+1$ 个实数的集合，将这些实数记作 a_1，a_2，a_3，……a_k，a_{k+1}．若从中省去 a_{k+1}，我们得到 k 个数字 a_1、a_2，……a_k；由归纳法假设这些数字均相等．

$$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_k.$$

若从 S 中省去 a_1，我们也得到恰恰 k 个数字 a_2，a_3，……，a_k，a_{k+1}；由归纳法假设这些数字相等：

$$a_2=a_3=\cdots\cdots=a_k=a_{k+1}.$$

由此容易证明 S 中所有 $k+1$ 个数字均相等．≪

壹

什么是拓扑?

1-1 欧几里德几何一瞥

当前我们只要对拓扑有一个直觉的感受就够了. 在第 7-3 节中再给出它的正式定义. 注意一下拓扑与中学的普通几何(欧几里德几何)间的相似性与相异性就能产生这种直觉的感受.

欧氏几何研究平面或空间图形的某些性质. 它并不考虑一个图形的所有性质, 而是只考虑其"几何的"性质. 那么我们怎样才能分辨出某个性质是否为几何性质呢? 譬如我们可以注意一下图 1.1 中所示三角形的下列性质:

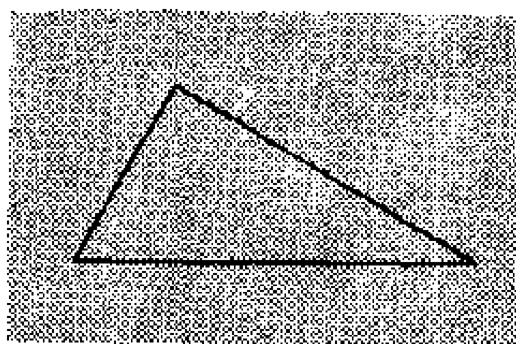


图 1.1

(1) 最长一边的长度为 2 英寸.

(2) 三角形是用黑墨水画的.

(3) 有一个角约为 90°.

(4) 三角形是画在这一页的左边.

(5) 约为 90° 的角在此页上处于较其它角为高的位置.

上述这些性质中哪些是几何性质呢?

问题的解答可建立在全等图形概念的基础上. 所谓两图形全等, 当且仅当其中一个图形放在另一个图形之上使两图形完全重合. 一个图形的几何性质就是所有与此图形全等的图形都能具有的性质. 这就是说, 所有全等图形对几何学家来说都是一样的. 在研究某一个图形时, 他只对那些所有与它全等的图形所共同具有

的性质感兴趣. 现在很容易看出: 上面的性质 1 和 3 是图 1.1 中三角形的几何性质, 因为这些性质是任何一个与此三角形全等的三角形都具有的. 性质 2, 4 和 5 不是几何性质, 因为一个与给定的三角形全等的三角形可以不具有这些性质. 正象一个图形是五边形这个性质一样, 有四个角这一性质是一个几何性质. 其他的例子可见于习题.

1-2 什么是拓扑?

令人惊奇的是只需把上面第 1-1 节中的"几何"换为"拓扑","几何的"换为"拓扑的", 并改动一下某一个片语(phrase)的解释就可以得到一个完全令人满意的对拓扑的描述. 这一材料能够同时描述几何和拓扑, 其原因在于: 这两者所仅有的区别只是被一个片语所掩盖着, 这片语就是"全等"定义中的"可把……放在……之上". 现在我们较周密地考察这个片语. 我们是怎样"放置"一个图形的呢? 我们怎样才能够移动它呢? 在移动的过程中我们可以做些什么? 在几何中, 所允许的运动只能是刚性运动(平移、旋转、反射). 在这种运动中图形上任意两点间的距离保持不变. 因此, 几何性质就是那些在刚性运动中保持不变的性质——图形的任何刚性运动都丝毫不改变图形的几何性质.

在拓扑中, 所允许的运动可以称作弹性运动. 我们想象图形是由弹性极好的橡皮做成的. 因此, 在移动一个图形时可随意地伸张它、扭曲它、拉它或折它. 甚至可以将这样一个橡皮图形切断将它打个结, 只要事后再将切口缝合得与未切割时一样即可. 也就是: 没切割以前紧挨着的点在缝合后仍然紧挨着. 然而必须注意, 图形中不同的各个点仍为不同的点, 不可以使不同的两点合并成一点. 所谓两图形是"拓扑等价的", 当且仅当可把一图形作弹性运动使与另一图形重合. 一个图形的拓扑性质就是那些所有与

此图形拓扑等价的图形都能具有的性质．这就是说所有拓扑等价的图形对拓扑学家来说都是一样的．在研究某一图形时，他感兴趣的只是所有与它拓扑等价的图形共同具有的性质．由此，图形的拓扑性质就是那些在弹性运动中保持不变的性质——图形的任何弹性运动都丝毫不改变图形的拓扑性质．当然，拓扑是对图形的拓扑性质的研究．

的确，一个图形的拓扑性质也是此图形的几何性质，但是许多几何性质并不是拓扑性质．一个图形的拓扑性质可以只是它的那些最基本的几何性质．事实上，粗看之下可能觉得没有一种性质是拓扑性质，就是说一个图形的任一性质都可以被某种弹性运动所改变．幸而情况并非如此．例如，一个圆周 C（图 2.1a）把平面里的点分成三个集合——在圆内部的点，圆周上的点以及在圆外部的点．平面上一圆周的这种性质就是一种拓扑性质，因为如果我们设想此圆周和 A、B 两点都划在一片理想弹性的橡皮上，并对此图形进行一弹性运动，结果可能成为如图 2.1b 所示的一条曲线 C 和两个点 A 与 B．点 A 和点 B 各自位于圆的内部和外部（图2.1a），经过这片橡皮的弹性运动后，点 A 和点 B 依然各自位于曲线 C 的内部和外部（图 2.1b），因此"A 位于曲线 C 的内部"这一性质是原图形的一种拓扑性质．"A 比 B 更靠近 C"这一性质则不是拓扑性质，因为用弹性运动我们可以使得 B 非常接近 C 而且使 A 远离 C．

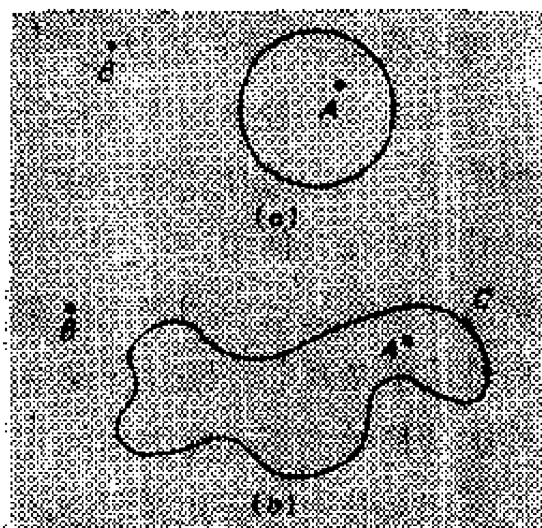


图 2.1

另一例子，图 2.2 中所示的圆周与打结的曲线为拓扑等价的，

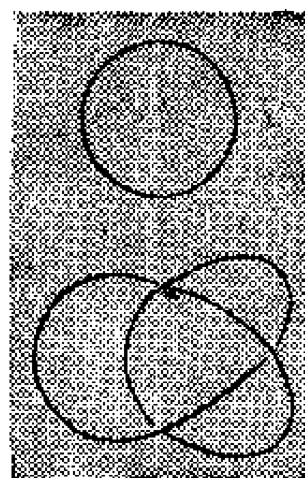


图 2.2

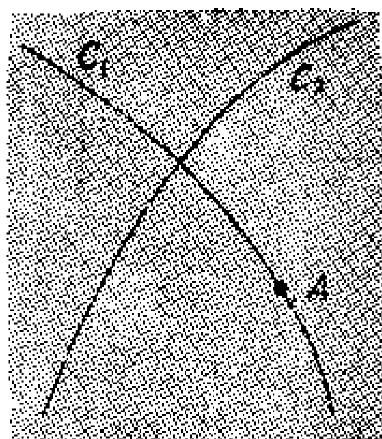


图 2.3

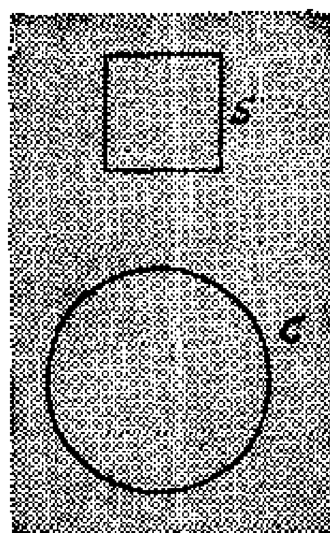
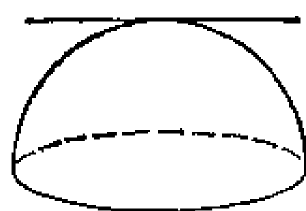
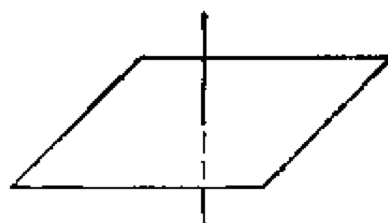


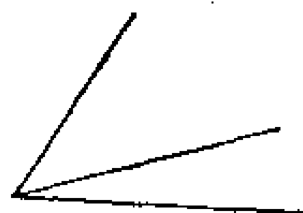
图 2.4

如果我们想像一条橡皮带成圆形，那么用拉和伸张的办法是不可能把它穿成一个结的，但是若先切断橡皮圈，打上一个结，然后再把两头接得与原来一样，这样就很容易得到一条有结的曲线．因为这些操作在我们所说的弹性运动下都是被允许的，因此这两曲线拓扑等价．其他的例子可见于习题．

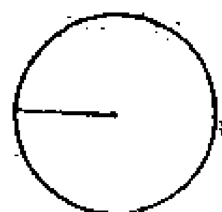


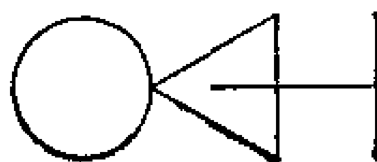
(a)



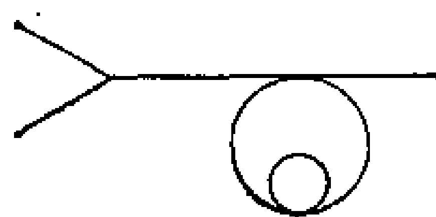


(b)





(c)



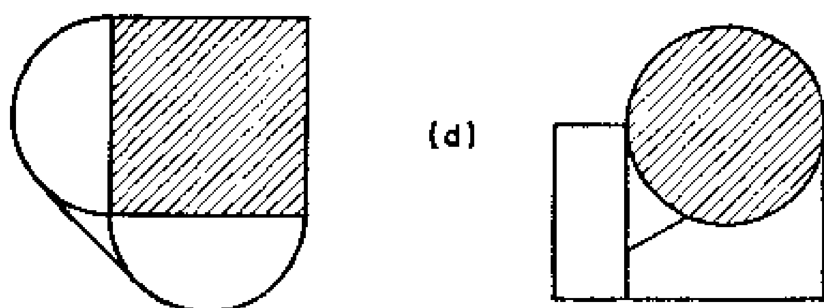


图 2.5

半球面与一切线 (*a*) 正方面与一穿过其间的直线

三条共点的线段 (*b*) 圆与一半径

(*c*)

此二图形皆由直线与曲线组成，不包含任何表面。

(*d*)

二图形中每一图形皆由一个面积(阴影线部分)与某些直线或曲线所组成。

习题

1. (*a*) 找出一个与图 1.1 中的三角形全等的三角形，使之没有与图 1.1 有连系的性质 2，4，5.

   (*b*) 找出图 2.1*a* 中平面的一种弹性运动，使得图中的 *B* 点比 *A* 点更靠近 *C*.

   习题 2 和 3 的说明：题中对图 2.3 和 2.4 列出了一些性质，其中哪些是几何性质？哪些是拓扑性质？

2. 下述性质都是就图 2.3 而言的：

   (*a*) 曲线 C_1 与 C_2 相交.

   (*b*) 曲线 C_1 与 C_2 相垂直.

   (*c*) 曲线 C_1 与 C_2 不相切.

   (*d*) *A* 点在曲线 C_1 上.

   (*e*) *A* 点不在曲线 C_2 上.

   (*f*) *A* 点位于曲线 C_2 的下方.

   (*g*) 曲线 C_2 凹向 *A* 点.

3. 下述性质都是就图 2.4 而言的:

(a) 此图包含画在一平面上的一个正方形和一个圆.

(b) 此图包含画在平面上的二条曲线; 其中一曲线有四个角, 另一曲线为光滑的.

(c) 曲线 S 所围成的面积比曲线 C 所围成的面积小.

(d) 由上方的曲线所围成的面积比由下方的曲线所围成的面积小.

(e) 曲线 S 和曲线 C 不相交.

(f) 没有一点它同时被围于曲线 S 和 C 之中.

*4. 图 2.5 所示的四对图形中, 哪些是拓扑等价的?

贰

网络和地图

2-1　网络的可贯穿性(Traversability)

西部俄罗斯城市库尼格斯堡(Königsberg，现称加里宁格勒)位于新普列格河和旧普列格河交汇成普列格河的地方．交汇处形成了一个小岛．十八世纪时河上有七座桥，如图 1.1 所示(之后又修了另外两座桥)．能不能步行游览库尼格斯堡而只通过每座桥一次呢？这一问题连同许多有关的问题是由瑞士数学家莱奥哈德·尤拉(L. Euler，1707—1783)于 1736 年解决的，其方法如下文所述．

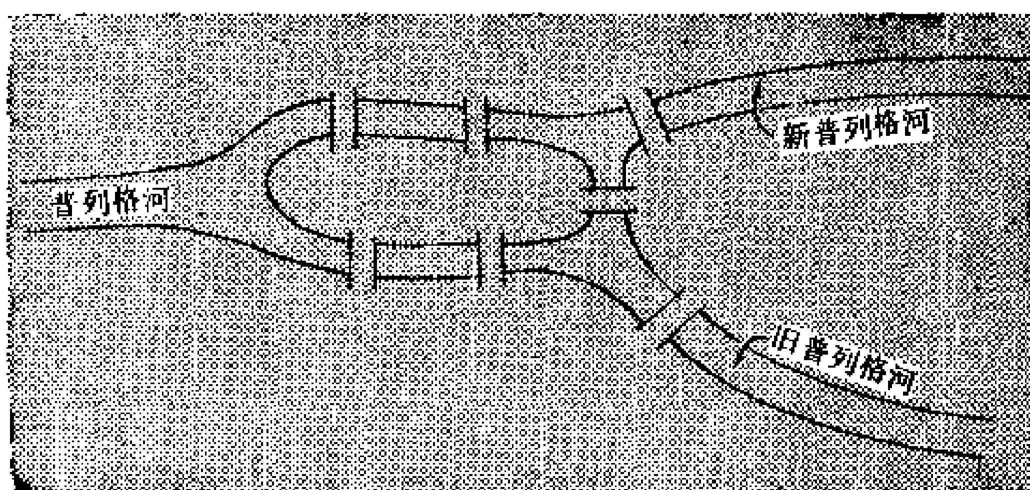


图　1.1

首先要指出，河岸的准确形状和岛的位置等等是无关紧要的，因此图 1.1 可被更简单的图 1.2 所代替．这个图指明该城的各个区域是怎样被桥梁连通起来的．图 1.2 中的 A 点代表座落在河的北岸的整个区域．同样，D 点代表河南岸的区域；B 点代表新、旧普列格河之间的区域；C 点代表岛域．线段或曲线代表城市各个

区域的桥梁. 线段或曲线(它可由线段经弹性运动而得出)称作**弧**. 甚至允许弧的两个端点合在一起(形成像圆那样的曲线)并仍将该图形称为弧, 但是弧除在其两个端点处外不得与其自身相交. (注意: 我们现在离开了标准术语. 通常要求弧的端点是不同的两个点. 但是我们将发现允许它们可为同一点是方便的.) 这样对库尼格斯堡桥的研究已经成为对含有七条弧和四个点的图形的研究. 在我们继续叙述尤拉的解法之前, 先建立几个一般术语是有益的. 它们在其它与此有关的方面也是有趣的.

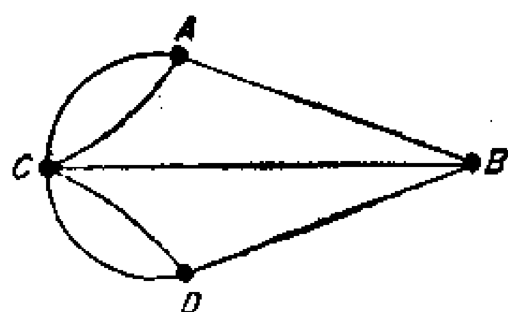


图 1.2

网络是一个图(平面上的或空间里的), 它由有限、非零条弧组成, 其中除在端点外, 任何两条弧都不相交. 这些弧的端点称作这网络的**顶点**. 图 1.2 给出一个有七条弧和四个顶点的网络, 其它网络的例子见图 1.3. 图中的顶点皆由大黑点表示. 我们并不总是使用如此规定. 当不使用这种规定时, 有时就需要多少有些随意性地决定哪些是顶点. 例如, 图 1.3b 中, 点 A 及点 B 必为顶点, 其他任何点都可以被选为顶点.

网络中, 一个顶点的**秩**† 是位于该点的弧端数. 一个顶点是**奇**或**偶**当且仅当它的秩是奇或偶. 图 1.2 中的顶点 A、B、D 的秩均为 3; 顶点 C 的秩为 5; 这四个顶点都是奇的. 图 1.3e 中仅有的一顶点是偶的, 其秩为 2, 因为有两个弧端位于该点. 事实上, 这两个弧端乃是同一弧的相反的两端.

一个网络中弧的总数可以为任意正整数; 同样地, 顶点的总数也没有限制. 另一方面, 每条弧皆有两个弧端, 所以弧端总数两倍

---

†原文为 order——译者注

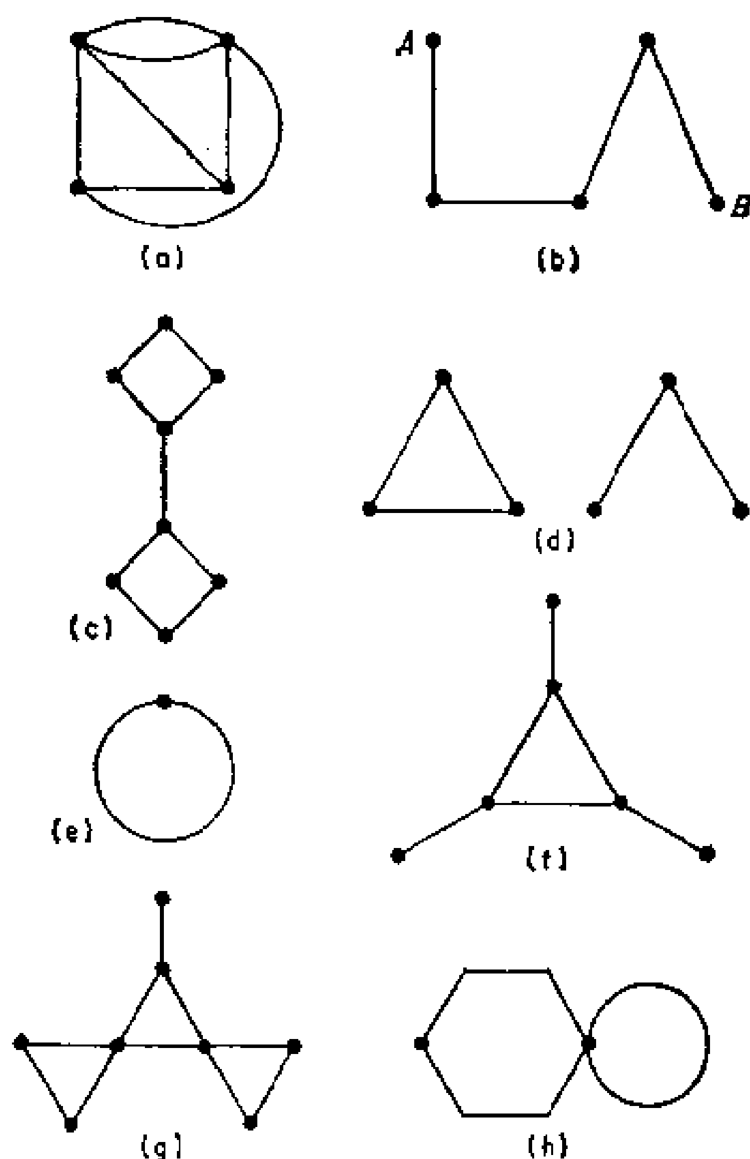


图 1.3 网络的例子

于弧的数目，因此是偶数. 但是弧端的总数是网络中所有顶点之秩的总和，于是任一网络中所有顶点之秩的总和必定是一正偶数. 在网络中随意选择弧和顶点数目的可能性将在习题 6 里考虑.

网络中的一条路径是指网络中一组连串的互不相同的弧，于其中我们可连续走遍每一条弧并且每条弧只通过一次. 这就是说，这一串弧中，每一弧必有一个端点被视为起端，而另一端点为其终端. 共用的一顶点必是第一条弧的终端且为第二条弧的始

端. 同样，第二条弧的终端是第三条弧的始端，如此类推. 路径上弧的顶点称为路径的顶点，路径的第一条弧的始端是路径的*始端*，路径的最后一条弧的终端是路径的*终端*. 一条路径是*封闭的*当且仅当其始端与终端为同一点. 路径有时用沿着路径上的一串顶点来标记之. 这样的标记法可能会不清楚. 例如，在图 1.2 网络中有 4 条不同路径可能被标记为 $ACBACD$. 当需要一种不含糊的标记时，就得使用不是顶点的点来准确指出所考虑的路径是由哪些弧所构成的.

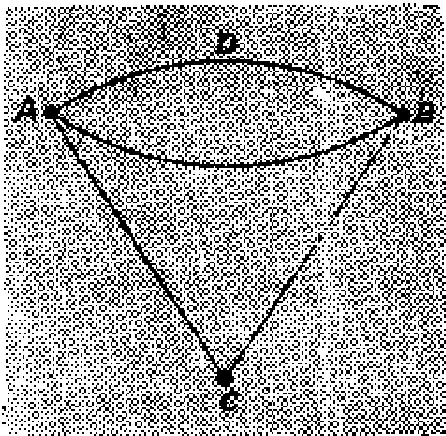


图 1.4

例 1.1 图 1.4 中，由 ABC 所示的有两条不同的路径，而 $ADBC$ 只标记其中的一条.

例 1.2 图 1.4 中的路径 $ADBCA$ 是由弧 ADB，BC 和 CA 组成的. 顶点 A 既是此路径的始端又是它的终端，因此此路径是封闭的. 顶点 C 是弧 BC 的终端和弧 CA 的始端.

一个网络是*连通的*，当且仅当网络中每两个不同的顶点是该网络中某一路径的端点. 图 1.3d 中的网络不是连通的，图 1.3 中所有其它的网络都是连通的.

有了这些知识，我们现在可以证明关于网络的某些一般结果. 用这些结果就很容易回答关于库尼格斯堡桥的那些问题.

定理 1.1 任一网络中，奇秩顶点的总数为偶.

证明： 给定任一网络，对每一正整数 i，令 n_i 为网络中秩为 i 的顶点数，并令 N 为奇秩顶点的总数，令 D 为弧端的总数. 奇秩顶点的总数是秩为 1, 3, 5……的顶点个数之和：

$$N = n_1 + n_3 - n_5 + \cdots\cdots$$

(和式的右方只有有限个项，尽管准确的项数有赖于所考虑的网

络. 这些符号将在这里和第 2-3 节中使用，它不牵涉到无限级数.）同样，弧端的总数等于位于秩为 1, 2, 3, ……的顶点的弧端的个数的总和. 秩为 1 的 n_1 个顶点计数着恰为 n_1 个弧端；秩为 2 的 n_2 个顶点计数着恰为 $2n_2$ 个弧端数；如此类推，于是

$$D = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots\cdots.$$

由此可得

$$D - N = 2n_2 + 2n_3 + 4n_4 + 4n_5 + \cdots\cdots.$$

因此 $D-N$ 为一偶数. 又由于每条弧都有两个弧端，D 乃是一偶数，而 $N = D - (D-N)$，故得 N 为一偶数. ≪

网络中的一路径称为"贯穿"这个网络，当且仅当此网络中的每一弧都包含于此路径之中. 网络中的一组路径"贯穿"这个网络，当且仅当此网络中的每一弧包含于且仅仅包含于该组路径中的某一路径.

关于库尼格斯堡桥的问题现在可写成：是否有一路径贯穿图 1.2 中的网络？下列四个定理阐述了一个网络可被一条或几条路径贯穿的条件.

定理 1.2 若一网络有两个以上的奇秩顶点，它不能被单一的路径所贯穿.

证明： 我们将证明它的等价结果："若一网络可为一单一路径贯穿，那么除了有两个顶点是可能的例外以外，网络中其余的顶点均是偶秩". 令 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 为一串弧，它们构成贯穿某一已知网络的路径，并且令 A 为此网络中既非此路径的始端也非其终端的任一顶点. 路径的始、终两端可以重合也可以分立. 我们将证明 A 为此网络的一个偶秩顶点. 设想一个点，它从 a_1 的始端出发，沿 a_1 运动到 a_1 的终端（这也是 a_2 的始端），然后沿 a_2 运动到 a_2 的终端（这也是 a_3 的始端），如此类推，直到它最终到达 a_n 的终端. 每一次这个点经过顶 A 时，它计数着两个位于 A 的弧端——

一个到达 A，一个就要离开 A. 由此，位于 A 的弧端的总数必然是偶数，所以 A 为此网络中的一个偶秩顶点. ≪

定理 1.3 若一连通的网络没有奇秩顶点，则它可被单一的路径所贯穿. 并且，此路径的始端 A_0 可以任意选择，而构成此路径的那一串弧的第一条弧可选网络中以 A_0 为其顶点的任一弧 a_1 当之.

证明： 给定一网络，其中包含以 A_0 为始端的弧 a_1，令 A_1 为 a_1 的终端(A_1 和 A_0 可为同一个点)，并在网络中连接成如下一串弧；令 a_2 为网络中任一不同于 a_1 且以 A_1 为其一顶点的弧，取 A_1 为 a_2 的始端并令 A_2 为 a_2 的终端. 令 a_3 为网络中任一不同于 a_1 与 a_2 且以 A_2 为其一顶点的弧，取 A_2 为 a_3 的始端并令 A_3 为 a_3 的终端，如此类推. 当尽可能地如此进行下去时，这一过程就产生了一串不同的弧 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$，它们在网络中构成了一个路径. 若弧 a_n 的终端 A_n 不同于顶点 A_0 时，路径 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 计数着奇数个位于 A_n 的弧端(每次通过 A_n 时就有两个弧端位于 A_n，还有一个是弧 a_n 的终端). 由于网络中的每个顶点都是偶秩，所以网络中一定存在一条不同于 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 且以 A_n 为其一顶点的弧，于是这个过程又可以继续进行下去. 故而，当这个过程尽可能地进行下去时，A_n 必定与 A_0 共点，于是路径 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 是封闭的.

若此路径 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 贯穿整个网络，那么就证明完毕；若不然的话，因为此网络是连通的，所以就存在某一与 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 不相同的弧 b_1，其中 b_1 的一顶点 B_0 是路径 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 上的一个顶点；令之为 $B_0 = A_p$. 再次由 b_1 弧开始，以 B_0 做为始端，用同样的办法构成由一串弧 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_m$ 所形成的一个封闭路径，其中每一弧都互不相同且不同于 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$. 将这两条封闭路径连接如下：

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_p, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_m, a_{p+1}, \cdots\cdots, a_n.$$

由于 a_p 的终端与 b_1 的始端相同，而 b_m 的终端与 a_{p+1} 的始端相同，所以这一串弧为一路径. 若这一扩大的路径能贯穿整个网络，证明也就完毕；若不然，则路径仍可以继续扩大，因为网络中只有有限条弧，所以这种重复的扩大必定会最后产生一条贯穿整个网络的路径. (习题 11 将讨论这一证明的逻辑结构). ≪

定理 1.4 若一连通的网络恰有两个奇秩顶点，它就可以被单一的路径所贯穿，而此路径的始端和终端分别是网络中的这两个奇秩顶点.

证明： 给定一网络，其中 A, B 是仅有的两个奇秩顶点，用一条新的弧 a_0 将 A、B 连接起来，形成一个新的扩大了的网络. 在这个扩大了的网络中，每一顶点都是偶秩，由定理 1.3 可知存在路径 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$，它可以贯穿这一扩大了的网络. 那么路径 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 也就贯穿着原来的网络并且其始端和终端正是这两个奇秩顶点 A 和 B. ≪

定理 1.5 若一连通网络恰有 $2n$ 个奇秩顶点，它就可被一组 n 条路径所贯穿，但并不能被任何一组少于 n 条的路径所贯穿.

证明： 习题 3. ≪

习题

1. (*a*) 库尼格斯堡桥的问题已经表示在图 1.1 及图 1.2 中，解决这个

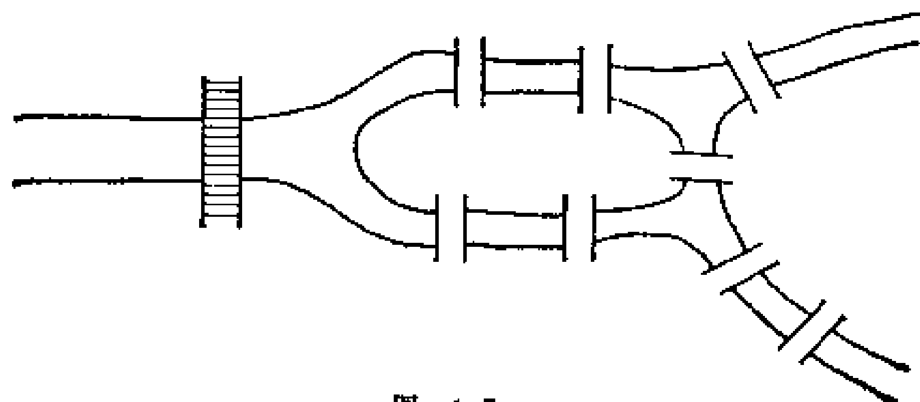


图 1.5

问题.

(*b*) 现在库尼格斯堡有九座桥，如图 1.5 所示(其中一条为铁路桥)，是否可能步行游遍库尼格斯堡并且每座桥都只通过一次？如果不包括铁路桥能否做到？

(*c*) 图 1.3 中哪些网络可被一条路径贯穿？

2. 图 1.6 表示有五间房间的一所房子的平面设计，是否可穿过每个门且每个门都只通过一次？

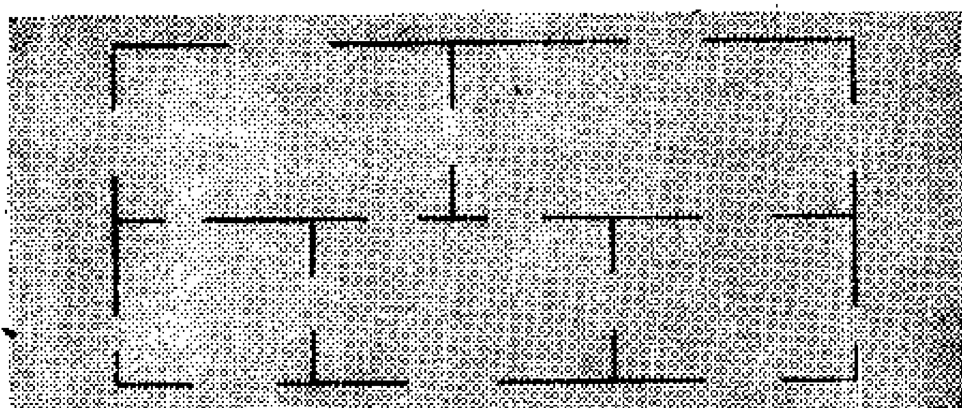


图 1.6

3. 证明定理 1.5.

4. 在图 1.7 里的每一网络中找出可以贯穿网络的一组路径，使得该网络不能被少于此组路径数的任何一组路径所贯穿.（提示：首先决定哪些点是顶点.）

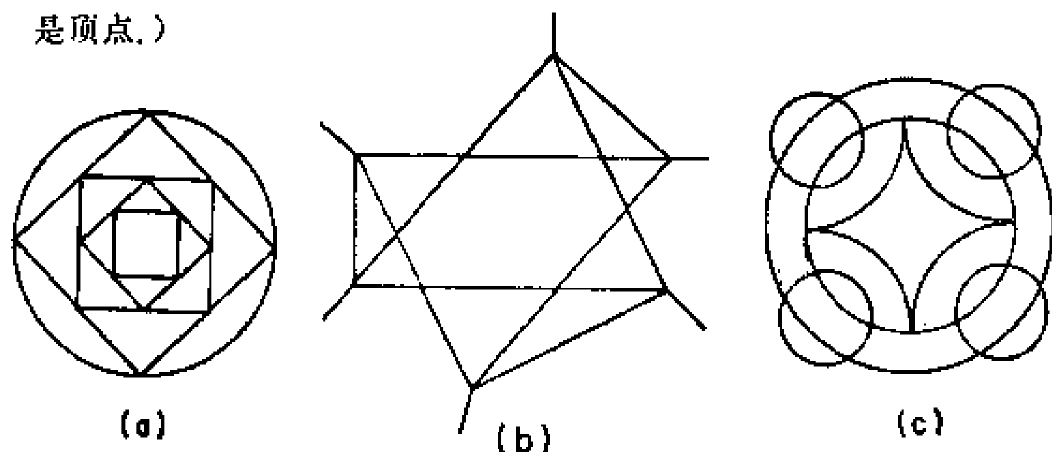


图 1.7

5. 证明：若一网络恰有两个奇秩顶点，则任何可以贯穿该网络的路径必以这两个奇秩顶点为其始点与终点.

6. (*a*) 是否有一个包含 50 条弧和一个顶点的网络？

(*b*) 是否有一包含一条弧和 50 个顶点的网络？

(*c*) 找出一个有 5 条弧和 8 顶点的网络.

(*d*) 证明：若 n 与 m 为正整数，使得 $m<2n$，则存在一个有 n 条弧和 m 个顶点的网络.

(*e*) 证明：若 n 与 m 为正整数，使得 $m<n+1$，则存在一个含有 n 条弧和 m 个顶点的连通的网络.

7. 化学上的应用. 分子结构可以用一个网络图解表示出来，网络的顶点代表组成分子的原子，弧代表特定原子对之间的化学键. 图 1.8 表明由 4 个原子构成的一个分子的两种主要不同方式且其中有两个原子各有两条化学键，而另外两个原子分别有一个或三个键.

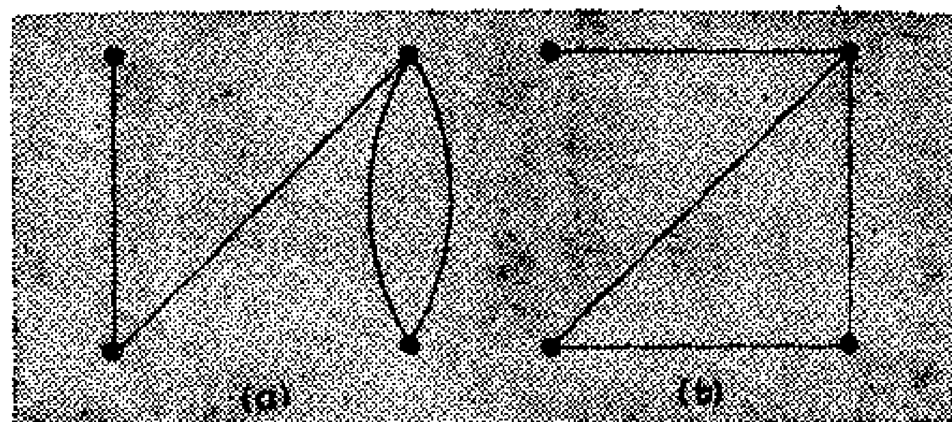


图 1.8

(*a*) 证明由题中对四个原子所给定的键只能有图 1.8 中两种分子结构形式.

(*b*) 找出三种分子，它们可由四个原子构成，其中有两个原子每个都有两个化学键，而另外的两个原子每个有三个化学键.

8. 哈密尔顿路径. 本文的定理所讲的是：要使一个网络能被单一路径贯穿，其充分必要条件是什么. 对路径所要求的性质作外表上微小的改变就能完全改变这个问题. 一个网络中的哈密尔顿路径是一个封闭的路径，使得网络中的每一顶点恰好只是路径中一条弧的终端.（因此也恰好只是路径中一条弧的始端）. 一网络具有一条哈密尔顿路径的充分必要条件尚不知道，这个问题来源于爱尔兰数学家威廉·罗文·哈密尔顿爵士（1805—65），他在正 12 面体上讨论了沿着棱的这种路径.

(*a*) 图 1.3 中哪些网络中有一条哈密尔顿路径？

(*b*) 图 1.7 中哪些网络中有一条哈密尔顿路径？

9. (*a*) 说明为什么 2-1 节的定理使拓扑学家感兴趣？

(*b*) 找一个使拓扑学家不感兴趣的关于网络的定理.

10. (*a*) 说明你是怎样决定图 1.7 中哪些点是顶点的. 你所做的决定是唯一可能的决定吗?

(*b*) 一图形中有一个可以是顶点或不必一定是顶点的点, 如果这个点被认为是顶点的话, 那么它的秩是多少?

11. 定理 1.3 的证明是基于数学归纳法的, 但是证明中将归纳法的步骤掩盖了, 指出证明中什么地方出现了这种现象. 用正式的归纳法步骤重写证明过程.

2-2 平面网络

第 2-1 节中的每个网络都是画在平面上的. 在某些情况下, 画在空间的网络可以拓扑等价于某一平面里的网络. 这就是说可能找到一个空间里特定网络的弹性运动, 使得该网络置于一个平面上. 图 2.1 表明一个平面里的网络, 它拓扑等价于由一个四面体的棱所构成的网络. 一个网络若拓扑等价于某个平面上的网络, 则称它为平面网络. 因此图 2.1 表明由四面体的棱所构成的网络是一个平面网络. 如果不仅考虑四面体的棱, 也考虑到它的所有表面的话, 它就不能由图 2.1 拓扑等价地表示. 因为在那个图形上, 平面上的一个点就会代表四面体上不同面上的两个点.

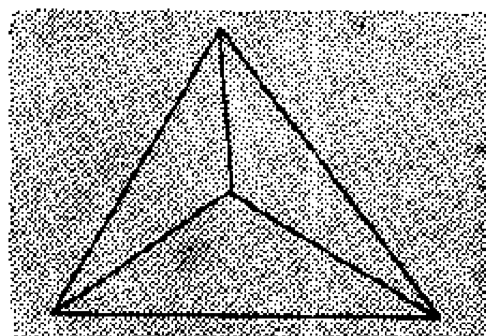


图 2.1

图 2.2 所示的煤气-水-电网络是非平面网络的一个有趣的例子, 它表明给三所房子 (分别由点 A, B, C 表示) 的每一所提供煤气、水和电(分别由点 G, W, E 表示)所需的连接图.

定理 2.1 此煤气-水-电网络是一个非平面网络.

证明: 我们必须证明, 图 2.2 所示的网络不能经由弹性运动而被置于一个平面上. 用反证法证明. 假设存在这么一个弹性运

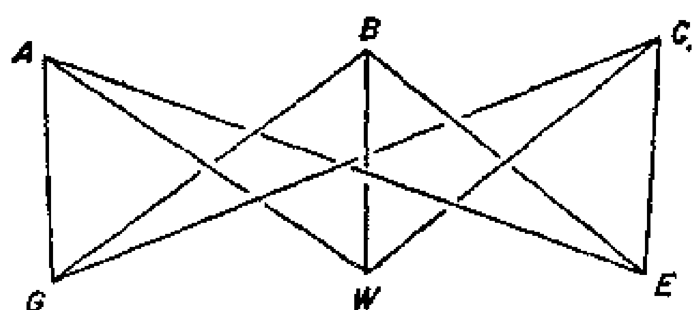


图 2.2

动，那么它一定能将 6 条弧：AG, GB, BW, WC, CE，和 EA 变换成完全包围着平面里某一部分的一条曲线（图 2.3）．至于剩下的三条弧 AW，BE 和 CG，其中一条必须放在曲线内部，而另一条得放在外部，然而无论怎么做，总是不可能将这三条弧中的最后一条放到平面上．≪

定理 2.1 的一种严格证明需要关于 θ 曲线的某些结果，这些是超出本书范围以外的．[参考 Kuratowski 的书《Sur le Problème des Courbes Gauches en Topologie》]

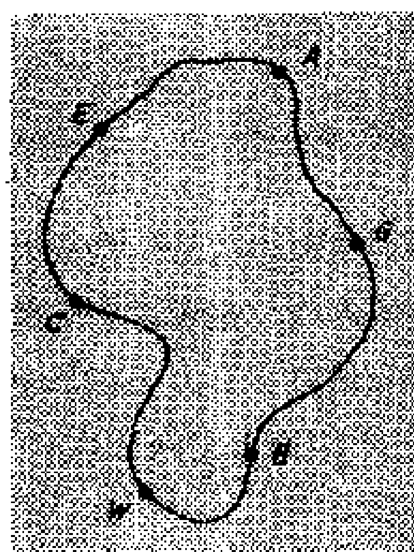


图 2.3

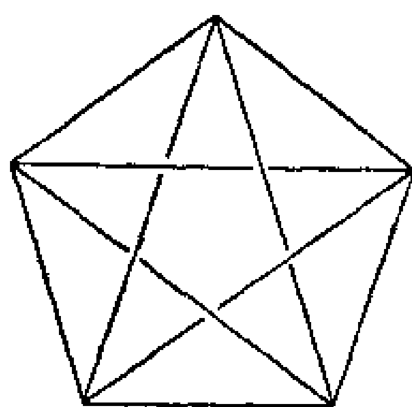


图 2.4

定理 2.2 一个网络，它的五个顶点中的每个顶点都有四条弧与其余四个顶点各自相联（图 2.4），是个非平面网络．这样的网络称为五点上的完全网络．

证明： 习题 2．≪

现在我们已经看到两个不能被置于平面上的网络的例子（图2.2和图2.4）. 波兰数学家库雷妥斯基(C. Kuratowski) 曾用这两个网络来刻划出平面网络的特征. 他的这种特征化也用到了子网络的概念. 一个给定网络的子网络是由已知网络中选出的一组路径构成的，这组路径必须符合下列两项限制:

（1）任意顶点都不在此组选定的路径中任一路径上重复（除了某一路径上的始端和终端可为同一点以外).

（2）这组选定的路径中的任意两条路径不得相交，除非是可能在它们的始端和终端处相交.

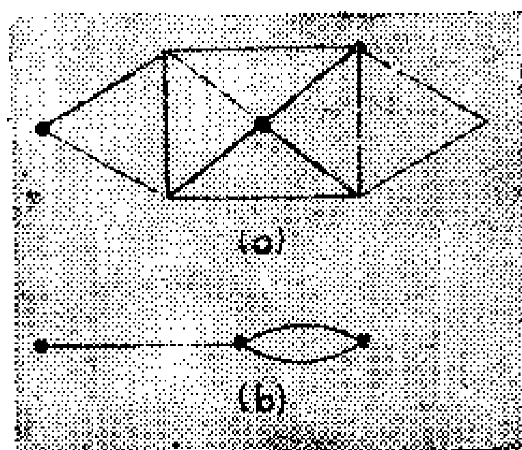


图 2.5

这组选定的路径就成为新网络中的一组弧，这样的新网络称为所给定网络的子网络. 例如图2.5*b*中的网络是图2.5*a*中网络的子网络，它是选自图2.5*a*中用粗线所示的那些路径所构成的. 当然，一个网络可以有很多子网络.

用这一子网络的术语，我们能够给出库雷妥斯基的结果. 他证明了[参考文献(28)]任何一个不能置于平面上的网络必有一个子网络拓扑等价于煤气-水-电网络或五点上的完全网络. 由此，这两种网络就刻划出平面的和非平面的网络之特征. 这个证明是超出本书范围之外的.

习题

1. 下列网络中哪些是平面网络？对每个平面网络找出一个可将它置于一个平面上的弹性运动.
   (*a*) 正方体的棱.
   (*b*) 正八面体的棱.
   (*c*) 正十二面体的棱.

(*d*) 正廿面体的棱.

(*e*) 椅子的腿，椅腿间的横撑、条板、外缘.

(*f*) 正方体的棱及各平面上的对角线(注意任意平面上的两条对角线相交，当然交点是一顶点).

(*g*) 正方体的棱，平面上的对角线及体内的对角线.

(*h*) 正方体的棱及体内对角线.

(*i*) 正八面体的棱及体内对角线.

2. 证明定理 2.2.

3. 定理 2.1 中的煤气-水-电网络能不能画在球面上？或画在一个油炸圈饼的表面上？

4. 定理 2.2 中的五点上的完全网络能否被画在球面上？或画在一个油炸圈饼的表面上？

2-3 四色问题

着色一张地图需要几种颜色？没有人准确地知道！本节我们将证明每张平面地图可以用五种颜色着色. 但是谁也没有发现需要用五种颜色着色的平面地图的例子——每个检验过的例子中都只需四种颜色就能给地图着色. 几位杰出的数学家对这一问题进行了大量的思考，但没人能证明四种颜色总是足够的.†

在开始证明五色定理之前，首先要清楚地了解什么是平面地图，以及着色一张平面地图所需要的条件. 一张地图是一个网络以及包含此网络的表面. 如果这个表面是一个平面，那么这些地图就称为平面地图或平面上的地图. 图 3.1 给出几个平面地图的例子. 本节只考虑平面地图，在更为一般的表面上的地图将在第 4 章里讨论.

初看起来平面网络与平面地图间的区别是很小的，但情况并非如此. 事实上，两者的出发点是完全不同的. 由于我们在地图

---

†此问题最近已被解决了——译者注

上使用了与我们在网络上所使用的有所不同的标记和术语，这种不同又被加强了．在一网络中，我们的主要兴趣集中在网络所包含的那些弧上，而顶点只是充当次要的角色．但是，在一地图里，主要兴趣的中心却在于那些被网络的弧分割表面而成的各个区域．网络本身只充当次要的角色，在地图册里的一幅普通地图中，表面上的这些分割而成的区域就是地图所示的州或国家．一般情况下，表面上的这些区域称作地图的各个**面**．在地图册的一张普通地图上，我们将平面上的地图以外的那部分也算做地图的一个面．于是在平面上，地图的面中有一个是没有界限的．网络上的弧和顶点相应地叫做地图的**边**和**顶点**，构成某个面的界限的那些边叫作该面的边．通常地图上的边是两个不同的面的边，但图 3.1*e* 和 3.1*h* 说明一个边可能只是一个面的边．

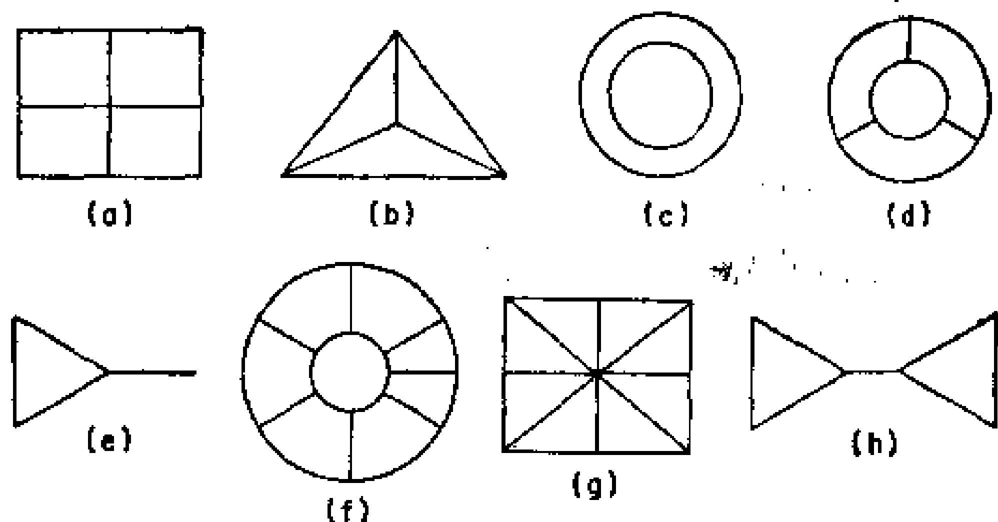


图 3.1　平面上地图的一些例子

着色地图时，共用一个边的两个面必须着不同的颜色．如果两个面只有共同的顶点或没有共同的边界点时，它们可以着成同一种颜色．例如，图 3.1*a* 中的地图方块中的四部分可以只用两种颜色来着色，因为可用同样的颜色着色对角的两部分；方块外面的区域必须用第三种颜色．

现在我们可以开始讨论五色定理了．为了证明，需要几个辅助结论，这些结论中的第一个在别的地方也是有用的．一张地图是连通的，当且仅当地图的网络是连通的．对任何连通的平面地图，地图的顶点数、边数和面数有下面定理所说的关系．

定理 3.1 （尤拉）若 V, E, F 分别为一连通平面地图的顶点数、边数和面数，则 $V-E+F=2$．

证明： 任何平面上一连通的地图都可以这样构成，即从一边开始而进行以下三种步骤（这在直观上是很明显的）：

(i) 增加一个新的边，只与原来边的一个端点相接．这样就增加了：1 个顶点，1 个边，没增加面．

(ii) 在已有的边上增加一新的顶点．这样就增加了 1 个顶点，1 个边，没增加面．

(iii) 增加一新的边，使其两端点均与原有的顶点相接．这样没有增加顶点，但增加了 1 个边，1 个面．

当我们从一个边开始时，有两种可能性：既可能是有两个顶点和一个面，也可能是只有一个顶点和两个面，在这两种情况下都有：

$$V-E+F=2$$

现在注意，上面所列的三种步骤都没有改变 $V-E+F$ 的这个和数．因为任一种步骤都是增加一条边，一个顶点，不增加面，或者增加一条边，一个面而不增加顶点．这样，由于 V、E、F 分别是最后形成地图的顶点数、边数和面数，我们仍有 $V-E+F=2$． ≪

地图是正则的，当且仅当其每个顶点的秩为 3．图 3.1b 和图 3.1d 都是正则的．下面的引理说明在正则、连通的地图上至少有一个面是较为单纯的．

引理 3.2 任何平面正则连通地图至少有一个面只有五个或五个以下的边．

证明： 在具有V个顶点，E个边、F个面的一个正则连通地图上，令$n_i(i=1,2,3,\cdots\cdots)$为有$i$个边的面的个数，那么面的总数即为$n_1+n_2+n_3+\cdots\cdots$，于是：

$$n_1+n_2+n_3+\cdots\cdots=F. \tag{1}$$

其次，每条边恰有两个弧端，且每个顶点都有三个弧端位于该点，于是$2E$和$3V$两数各给出了地图中的总弧端数，因而这两个表达式必相等：

$$2E=3V. \tag{2}$$

第三，地图上的每条边或者只是一个面的一边，或者恰是两个面的一边；这样如果我们把每个面的边数加起来以计算边的总数时，就有一些边只计数一次，一些边计数两次，但不会有任何一边被计数两次以上的. n_1个平面中的每一平面只有一个边，计有n_1个边；n_2个平面中的每一平面都有两个边，计有$2n_2$个边；如此类推，因而有：

$$n_1+2n_2+3n_3+\cdots\cdots\leqslant 2E. \tag{3}$$

由定理3.1我们有：

$$V-E+F=2. \tag{4}$$

从等式(2)及(4)

$$\begin{aligned}12&=6V-6E+6F=4E-6E+6F\\&=-2E+6F.\end{aligned}$$

于是$6F=12+2E$. 将此结果与等式(1),(3)结合，得出：

$$6n_1+6n_2+6n_3+\cdots\cdots\geqslant 12+n_1+2n_2+3n_3+\cdots,$$

或

$$5n_1+4n_2+3n_3+2n_4+n_5-n_7-2n_8-\cdots\cdots\geqslant 12.$$

对于每个i，有i条边的面的个数或者为正或者为零，故n_1到n_5中至少有一个数为正，即，至少有一个面有五个或少于五个边. ≪

现在我们可以证明我们一直期望的那类结论了. 先处理用6

种颜色给平面上某些特殊地图着色的问题；然后，我们将把颜色的数目减到5个并取消对地图的限制.

引理 3.3 任何平面正则连通地图可用6种颜色着色.

证明： 这个证明是在地图上对面的数目进行归纳法而得出的. 任何有六个面或少于六个面的地图显然可以用6种颜色着色. 考虑有 n 个面的正则连通地图，$n>6$，并假设所有少于 n 个面的正则连通地图都可以用6种颜色着色，那么只要证明这个地图(有 n 个面的)可以用6种颜色着色就行了. 由定理3.2，地图上至少有一个面 f 有五条或少于五条的边. 这个面至少有一条边将这个面与另一个面分开(习题1)，选择任意一条这样的边 e，将它从图形上移去，这样 e 的两个顶点就变成秩为2的顶点了. 于是由于将秩为2的顶点的两条弧连成一条弧，就不需要再把这两个顶点视为顶点了. 这样，移去边 e 使面 f 与另一个面相接而形成一张新的有 $n-1$ 个面的正则连通地图. 由归纳法假设，此地图可用6种颜色着色. 当把边 e 重放到图上时，就得到原来的地图，而面 f 最多与其他五个面有一条公共边，所以在六色中必有至少一色可用于面 f. ≪

习题

1. 证明引理3.3的证明中所指出的问题，即 f 中至少有一条边将 f 与另一面分开.（提示：由 f 的任意一边开始，先构成由 f 的边组成的一个路径；然后由于地图上只有有限个顶点，则当此路径延续到足够长时，某个顶点必须要出现两次.）
2. 在引理3.3的证明中，若如图3.2所示，面 f 只有一条边时情况将会怎

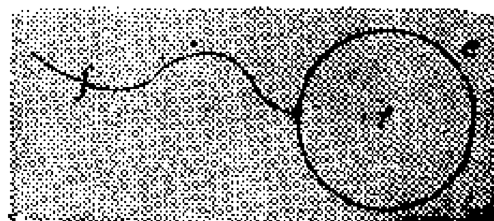


图 3.2

样？（提示：当移去边 e 时，e 的一个顶点就会变成秩为 1 的顶点，可不可能同时移去也含有这一顶点的另外一条边？）

3. 给图 3.1 中所示的每个地图着色所需的最少颜色种数各为多少？

4. (*a*) 如引理 3.3 的证明和上面的问题 2 中所说明的那样，在图 3.3 中所示的每个正则连通地图中找出一个含有五条边或少于五条边的面 f，和 f 的一个边 e，使得 e 将 f 与其他的面隔开. 移去边 e 得到比原地图少一个面的正则连通地图.（注意：在证明引理 3.3 的归纳法步骤中，我们考虑的是多于六个面的地图，但为了简单起见，图 3.3 中的地图中的面均少于此数.）

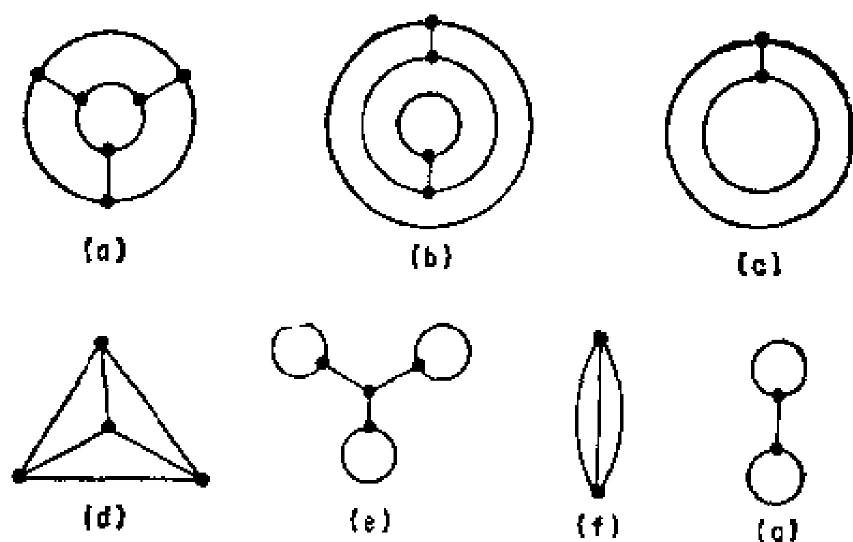


图 3.3

(*b*) 对图 3.3*c*，3.3*f* 和 3.3*g* 中所示地图，引理 3.3 的证明中所用之归纳法证明步骤，为什么行不通？证明这一归纳法步骤可用于任意有两个以上顶点的正则连通地图.

5. 证明不可能有五种以上的正立体.（提示：考虑由此种立体的棱所构成的网络. 如果每个顶点秩为 n，且每个面是有 m 边的多边形，证明 $nV=2E=mF$. 然后使用尤拉定理.）

6. (*a*) 证明任意正则连通地图上有偶数个顶点.

   (*b*) 证明若 n 是任意正偶数，则存在一个有 n 个顶点的正则连通网络.

7. 在引理 3.3 的证明中，为什么移去边 e 后网络仍是连通的？

8. 画一地图，其中每个面都有不少于六条的边.

现在我们已经看到 6 种颜色足够给任意正则连通地图着色，

下一步的任务是说明用五种颜色就够了.

引理 3.4 平面上任意正则连通地图可被 5 种颜色着色.

证明: 证明的方法是在地图中对面的数目进行归纳. 任何有五个或少于五个面的地图显然可用五种颜色着色. 考虑有 n 个面的正则连通地图, 其中 $n>5$, 并假设所有面数少于 n 的正则连通地图可以用五种颜色着色; 那么只要证明这种有 n 个面的地图可用五种颜色着色即可. 像引理 3.3 的证明一样, 至少有一个面 f 含有五条或少于五条的边, 但这里证明分三种情况进行.

情况 1. 面 f 有四条或少于四条的边. 证明过程与引理 3.3 的证明过程完全一样; 找出将 f 与其他面分开的 f 上的边 e, 从地图上移去 e, 得到有 $n-1$ 个面的一个正则连通地图. 给这个简化了的地图着色. 当把边 e 重新放在地图上时, 面 f 将与最多四个其他的面有一条公共边, 于是五种颜色中必有一种颜色可用来着色面 f.

情况 2. 如图 3.4, 地图有一条边 e, 使得当 e 从地图上移去

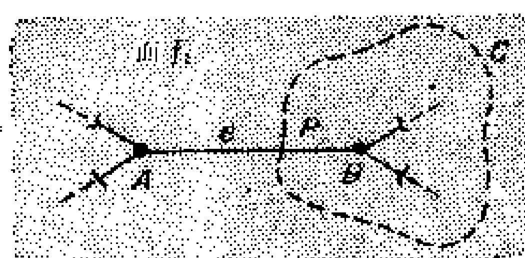


图 3.4

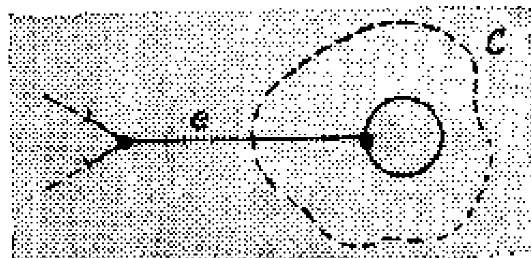


图 3.5

时, 地图变为不连通的. 由于 e 使地图不连通, 故 e 的两侧必为同一个面 f_1, 并且在这个面里我们可以画一曲线 C, 如图 3.4 中的虚线, 它从 e 的一侧到 e 的另一侧. 如果曲线 C 只围住地图的一个面, 则这个面必定只有一条边, 如图 3.5 所示. 这种情况在情况 1 中已经讨论过了. 同样地, 如果曲线 C 外面只有地图的一个面, 就又出现情况 1.

如果C内至少有地图的两个面，且C外至少有地图的两个面，则原地图可被两个分开的地图所代替，如图3.6a及3.6b所示. 这两个地图是于曲线C与e边相交P点处（图3.4）切割e边而成的. 这一切割使得此网络不连通. 现在考虑由此网络之分离的两部分所组成的两个地图. 每个新地图由于在边e被截处P点上各自画一环路而成为正则的. 在图3.6a中，面f_1已被我们扩大，

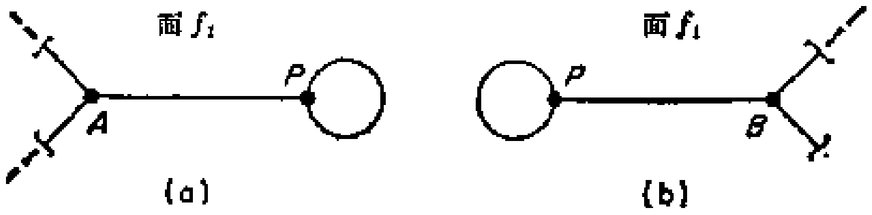


图 3.6

包含图3.4的曲线C内的一切(环路内新形成的面除外)；同样，图3.6b中的面f_1几乎包含图3.4中C外部的一切. 现在，由构造这两个新地图的过程，我们知道每个新地图中至少有原地图的两个面包含于f_1中，而环路只产生一个新的面，所以这两个新地图各含有少于原地图所含的面. 由归纳法假设，这两个分离的地图中的每一个均可被五色着色. 将两个图上的f_1面着成同样颜色并把图3.6中的两个图放在一起，把两个环路缩成一个点就得到一个用五种颜色着色的原图.

情况3. 移去任何一边都不能使地图成为不连通的，而且有一个有五条边的面f. 在这种情况下，不存在在其两侧是同一个面的边，因为若存在这样的边，则移去它可使地图成为不连通. 这样，如图3.7所示，面f有五条边，且边e_1, e_2, e_3, e_4, e_5中的每一条都在其另一侧有一个不同于f的面，用f_i表示在边e_i的另一侧的面.

面f_1, f_2, f_3, f_4, f_5不必各不相同，但下面我们将看到，其中至少有两个面是不同的，并且没有公共边. 实际上，若f_1和f_3没有公共边，我们就可以用它们，如果它们确实有一公共边的话，那么

就可能在面 f, f_1 和 f_3 上画出如图 3.7 中虚线所示的曲线 C_1. 这一曲线可以完全包围 f_2 或完全包围 f_4 及 f_5, 在这两种情况下 f_2 都不能与 f_5 有公共边.

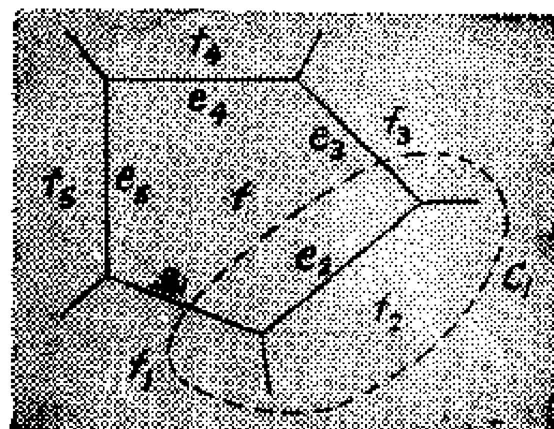


图 3.7

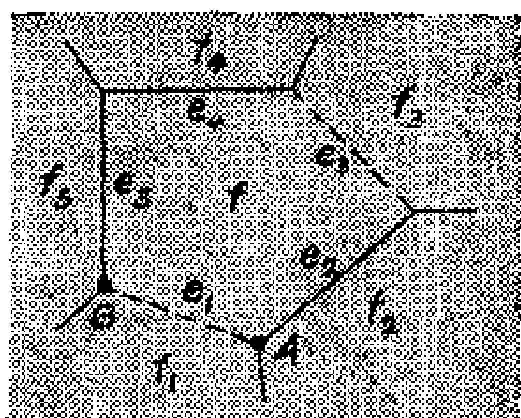


图 3.8

我们现在假设 f_1 与 f_3 是没有公共边的两个面. 从地图上移去边 e_1 和 e_3, 做一新地图, 如图 3.8 所示. 其中 f, f_1 和 f_3 连接成一个面, 利用通常省略顶点的办法†. 这个新的地图仍保持是正则的, 而且移去 e_1 和 e_3 之后, 地图依然是连通的. 因为, 譬如点 A 可通过沿着原来的面 f_1 的边运动而与点 B 相连. 这个新地图比原地图少两个面, 因此根据归纳法假设, 新地图可用五种颜色着色. 并且原地图因此也可用五种颜色着色, 因为当把边 e_1 和 e_3 重放在地图上时, 面 f_1 和 f_3 没有公共边, 所以可以用同一种颜色着色, 并且 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 五个面最多只需用四种不同的颜色着色, 这样在五种颜色中至少还剩下一种可用于面 f. ≪

现在很容易证明五色定理了: 这只需要去掉加在所考虑地图上的正则性与连通性的限制即可.

定理 3.5 平面上的任何地图可用五种颜色着色.

证明: 首先考虑平面上任意一个连通地图. 将每个秩 $n \neq 3$

---

† 此指秩为 2 的顶点, 若它为二相异弧之交点, 则经常可以省略不计, 而把此二相异弧看成一弧. ——译者注

的顶点"吹"成有 n 个边的小面，就得到一个正则连通地图(图 3.9 表明将秩分别为 1,2,5 的顶点吹起来的过程)．从引理 3.4 知，所得出的正则连通地图可用五色着色，于是将所增加的每一个小面缩小成一个点，我们就得到着好色的原来的连通地图．这一缩小过程并不使原地图上两个不同的面的任意公共边发生变化，所以此种着色是令人满意的．所以，平面上的任意连通地图可为五种颜色着色．

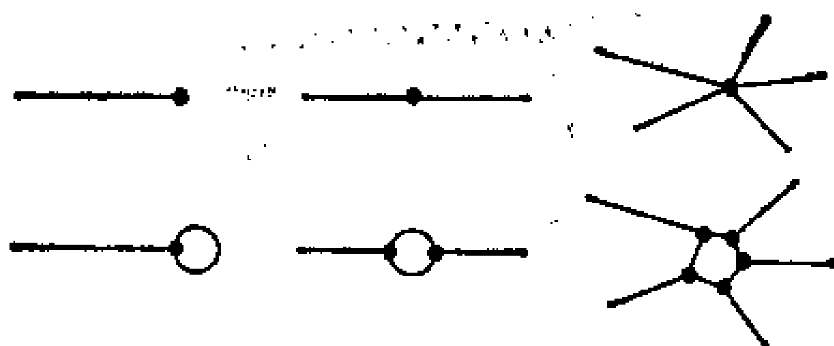


图 3.9 从秩为 1,2,5 的顶点构造成秩为 3 的顶点

最后，考虑平面上一个任意地图．如果它是不连通的，只要增加一些新的边，并使这些新的边的两侧是同一个面，我们就能使地图成为连通的．前面的段落说明，连通地图可为五种颜色着色，只要去掉用来使地图成为连通的所增加的那些边，就得到一着好色的所给的任意地图．因为这些新边的每一条的两侧都是同一个面，所以这些边的两侧是同一种颜色，于是取消这些边之后，此种着色仍然令人满意．≪

习题(续)

9．对图 3.10 中每一地图进行定理 3.5 的证明中所讲的构成方法，从而得出一正则连通地图．

10．(*a*) 对图 3.11 中的每个地图，决定需要应用引理 3.4 的证明中的哪一种情况(这些情况并非互相排斥的，所以，可以应用一种以上的情况)．

(*b*) 在图 3.11 中的每一个地图上，有五条边的特殊的面用字母 f 标记．

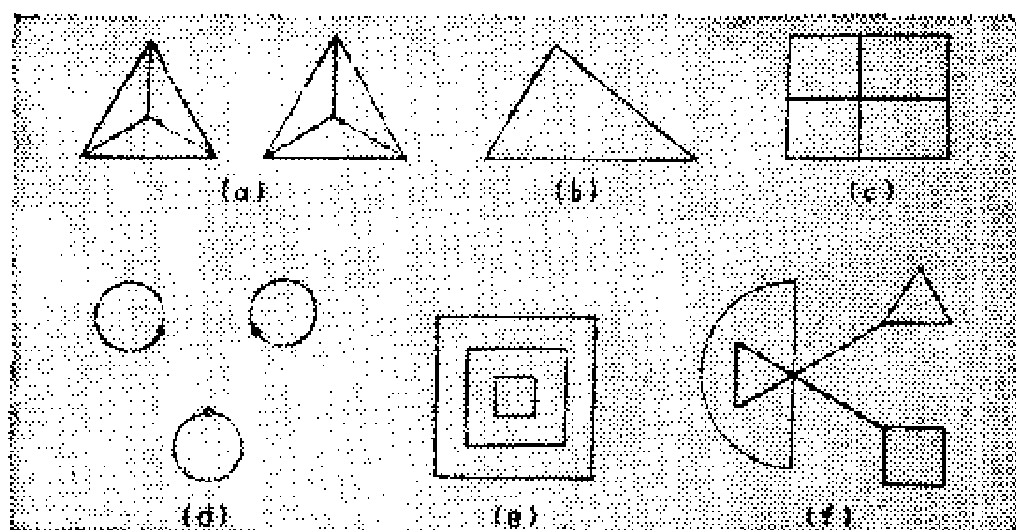


图 3.10

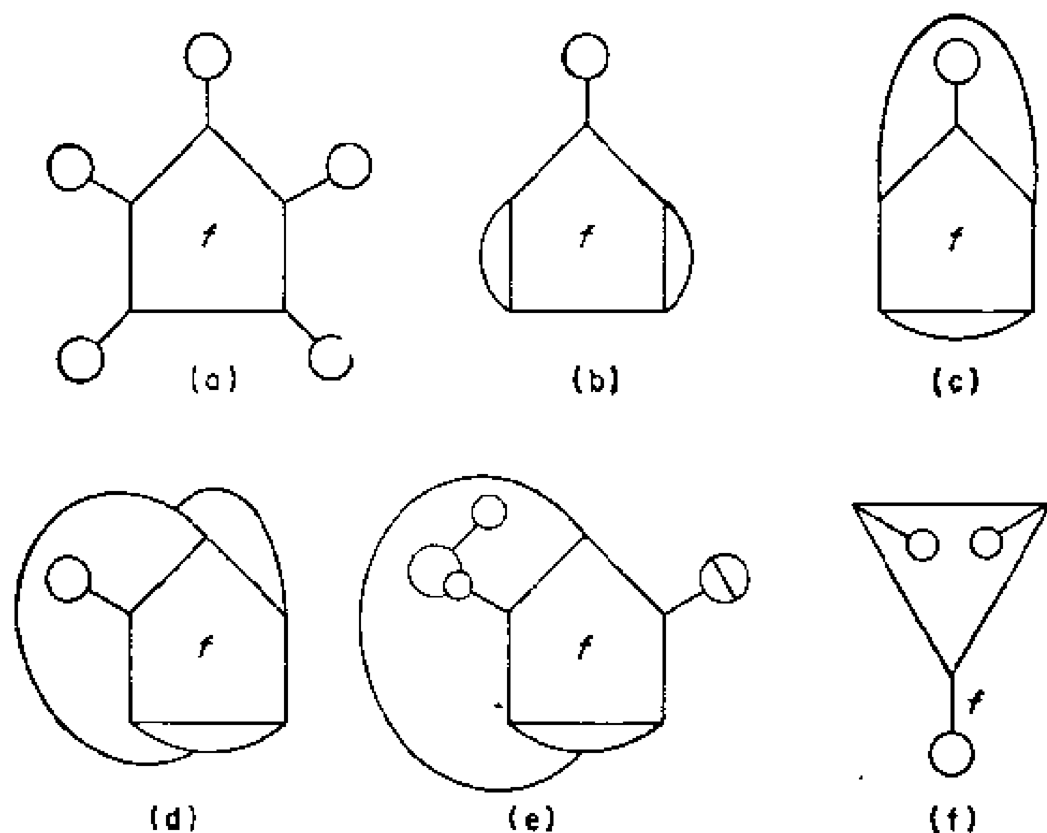


图 3.11

试对这一面进行引理 3.4 的第三种情况的证明过程.

11. 图 3.12 是一个平面上的正则连通地图. 该图需用引理 3.4 的证明中的哪几种情况? 证明此图可为四种颜色着色.

12. 证明下述命题，它与引理 3.4 的证明中情况 2 所用的图 3.4 有关．如曲线 C 内只围着地图的一个面，则这个面必只有一条边．

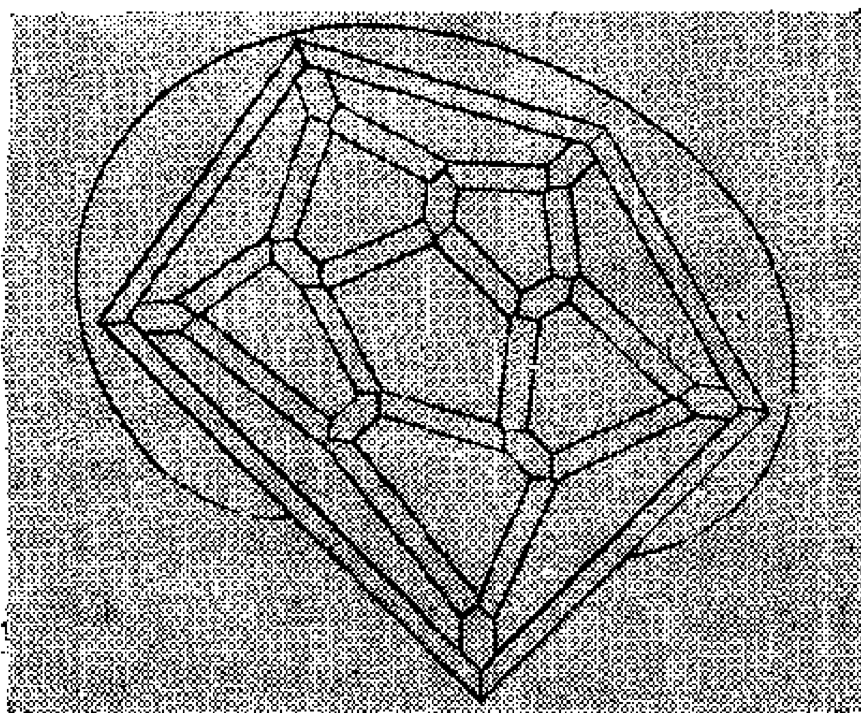


图 3.12

13. 证明引理 3.4 中情况 3 所用的下述结论：若地图之一边 e 在其两侧有同一个面，则移去 e 将使地图成为不连通的．

14. 证明下述命题，它与引理 3.4 的证明中情况 3 所用的图 3.8 有关：点 A 可以沿着原来的面 f_1 的边移动而与点 B 相连．

*15. 证明不可能在平面上画出一个地图，它的五个面有如下性质：它们中的每一个都与其他四个面有一条公共边．为什么这不能证明四色定理？（提示：回忆一下五个点上的完备网络不能画在平面上．）

16. 举一例证明，对任意正整数 n，在三维空间中都可能有 n 个立体，其中每一个都与其他的每一个有一公共区域（面）．由此，把四色问题扩展到三维空间里的体积上来并不令人感兴趣了．

叁

三维空间里的拓扑等价关系

3-1 拓扑等价关系

一个立体球拓扑等价于一个立方体或任何正则立体. 如像第1章中提到的, 三维欧几里德空间中的两个图形称做拓扑等价的, 当且仅当存在一弹性运动, 使得其中一图形与另一图形重合. 当然如果我们给出两个物理客体, 其中一个是固体橡胶球, 另一个是固体的木制立方体, 我们不能使橡胶球与木立方体重合. 如果我们想使它们重合, 它们就得互相撞击, 使得橡胶球平贴在立方体的外表面上而不通过立方体的内部. 这一例子可以用来强调数学所研究的图形——无论是在欧几里德几何中还是在拓扑学中——不是物理客体, 而是抽象图形. 一个三角形不是可以用木头、纸张或绳子做成的东西, 它是由以某种方法安放在一起的"线段"构成的, 而线段又是"点"的某种组合. 这样, 对几何或拓扑进行任何认真的研究, 就需要一个适当的基础知识, 即对点集合进行一些讨论, 并清楚地理解怎样使一个点集与另一个点集重合. 我们将这一基础知识放在第6章里. 现在, 我们仍然依靠对图形的拓扑等价的直觉, 它是建立在理想弹性图形的弹性运动上的.

下面将讨论我们感兴趣的几个标准图形, 其中有的在前面的章节中非正式地出现过, 但为完备起见, 这里将它们描述一番.

一个圆是一平面曲线, 它上面的每一点与平面上一定点的距离为某一定长. 这一定点就是圆心, 定长即圆的半径. 一单纯封闭曲线乃是与圆拓扑等价的曲线. 一个单纯封闭曲线可以在一个

平面上也可以不在一个平面上. 图 1.1 给出不在一平面上的打结的单纯封闭曲线的例子.

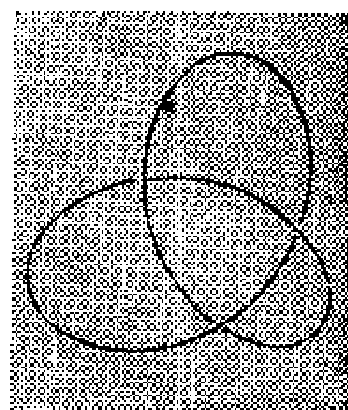


图 1.1

一个开圆盘乃是平面上被某一圆所围住的那部分，但不包括圆本身. 一个闭圆盘乃是平面上的某一圆的内部或圆上的那部分，即圆曲线上的每一点都在闭圆盘上. 注意，无论开的或闭的圆盘都是平面上的一个表面. 一个闭的圆盘是一个开的圆盘加上其内部为该开圆盘的那个圆.

一个球面是一个三维的表面，它上面所有的点与某一定点的距离为某一定长，这个定点即此球面的球心，这个定长即此球面的半径.

一个开圆球是三维空间中被某一球面所围住的那部分，但不包括球面本身. 一个闭圆球是三维空间中某一球面的内部或球面上的那部分(即球面上所有的点都在闭圆球上). 注意，无论开圆球还是闭圆球都是三维空间里的一个立体. 一个闭圆球是一个开圆球加上其内部为该开圆球的那个球面.

一个带 p 个柄的球面乃是三维空间里这样的一个表面：在一球面上凿 $2p$ 个洞，弯曲 p 个不同的管子，将它们的两端分别插在这些洞里而得到的一个表面. 图 1.2 表示一个带三个柄的球面.

一个"胎形"(图 1.3) 乃是三维空间里这样的一个表面：将一个圆绕圆所在平面且不与此圆相交的直线旋转而得到的一个表面. 可以把胎形想成一个车轮的内胎或一个油炸圈饼的表面.

如果两个图形是拓扑等价的，我们可以用一弹性运动将一图形变成另一图形来证明之. 例如，设有一圆形橡胶带，我们可将它切断，弯曲成图 1.1 中曲线的形状，然后再把两端接成它们原来的

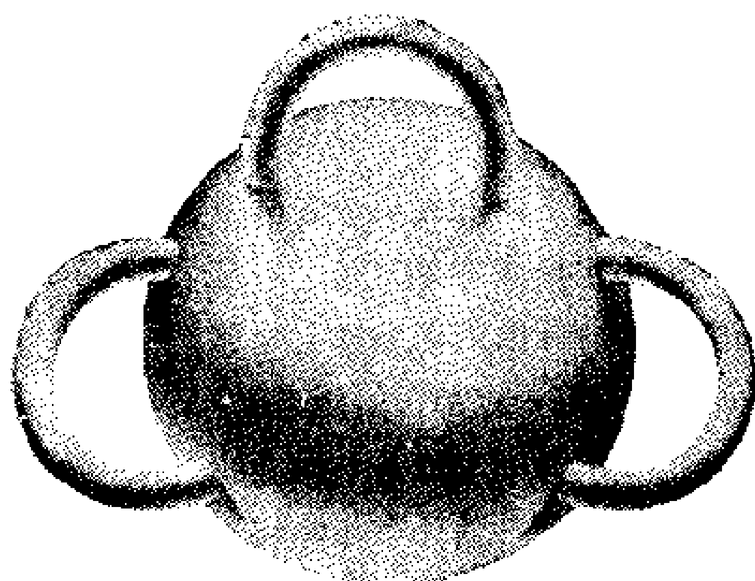


图 1.2

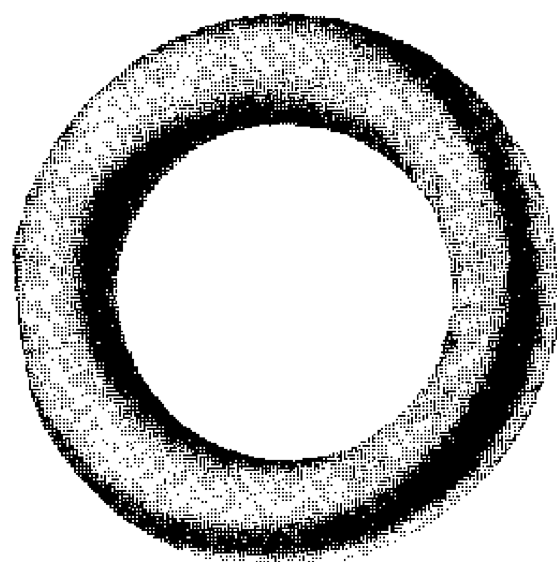


图 1.3

样子. 这可以证明图 1.1 中的曲线确实是一个单纯封闭曲线, 因为它拓扑等价于一个圆.

那么怎样证明两个图形不是拓扑等价的呢? 这就需要证明不存在任何弹性运动, 可将一个图形变成与另一图形重合. 当然, 我们不可能一一试用每种弹性运动——不同的弹性运动太多了.[1]给出这类证明的一个方法是, 找出其中一个图形的一种性质, 而这性质不为另一图形所具备. 如果这一性质是拓扑性质, 那么这两个

图形就不可能是拓扑等价的．因为任何弹性运动都不能产生或消除这一性质，所以没有一种弹性运动可使其中的一个图形与另一图形重合．我们证明一个球面不拓扑等价于一个胎形，以此为例说明这类证明过程．事实上，如果球面上面有一任意单纯封闭曲线，并沿此曲线切割球面，则这个表面就分裂成两部分．故球面上任意单纯封闭曲线都使得这个球面不再是连通的．而胎形不具有这一性质．如果有一个圆穿过胎形的一个洞并围绕着胎的横切面，用这样的圆曲线切割此胎形，这个表面就变成一个管子，但它仍然是一个整体．所以胎形不能被这样的曲线切割成不连通的，故胎形不具有球面所具有的上述性质．而且，一个表面可以被它上面的任意单纯封闭曲线切割成不连通的这一性质显然是拓扑性质．于是，一个球面与一个胎形不拓扑等价．

习题

1. (*a*) 证明胎形拓扑等价于只有一个孔的钮扣的表面，并且也拓扑等价于带一个柄的球面．

   (*b*) 胎形上是否有一单纯封闭曲线可以使胎形成为不连通的？

2. 证明有 p 个孔的钮扣的表面拓扑等价于带 p 个柄的球面．

3. (*a*) 证明带两个柄的球面不拓扑等价于带三个柄的球面．

   (*b*) 证明若 $p\neq q$，则带 p 个柄的球面不拓扑等价于带 q 个柄的球面．

4. 将下列各项分组，使得同一组中的各项都是拓扑等价的，而不同组的各项不是拓扑等价的．

   (*a*) 一个圆，

   (*b*) 一个开圆盘，

   (*c*) 一线段，

   (*d*) 一个球面，

   (*e*) 一个球状壳（三维空间中同心而半径不等的两个球面之间的部分），

   (*f*) 一个球，

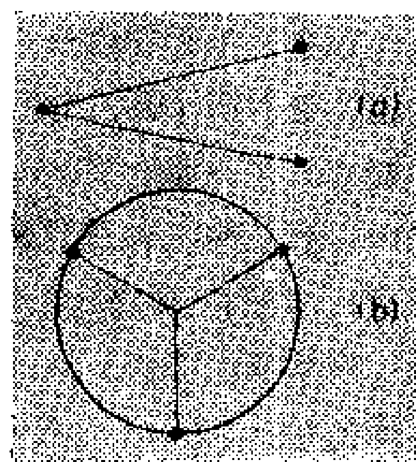


图 1.4

(*g*) 正方体的表面,

(*h*) 一个正方体,

(*i*) 一个正方体,它具有一个穿透它的洞,

(*j*) 一个胎形,

(*k*) 由四面体的棱组成的网络,

(*l*) 一个形如煤气管的立体,

(*m*) 一个形如两端各有一个栓的煤气管的立体,

(*n*) 一个形如一只右手的厚皮手套的立体,

(*o*) 一个形如一只左手的厚皮手套的立体,

(*p*) 一只形状简单的金戒指,

(*q*) 一个圆环(平面上同圆心不同半径的两个圆之间的部分),

(*r*) 一张唱片的表面,

(*s*) 图 1.4*a* 中的网络,

(*t*) 图 1.4*b* 中的网络.

5. 将图 1.5 中的大写字母分组,使得在同一组内的各个字母是拓扑等价的,并且不同组中的字母不是拓扑等价的.

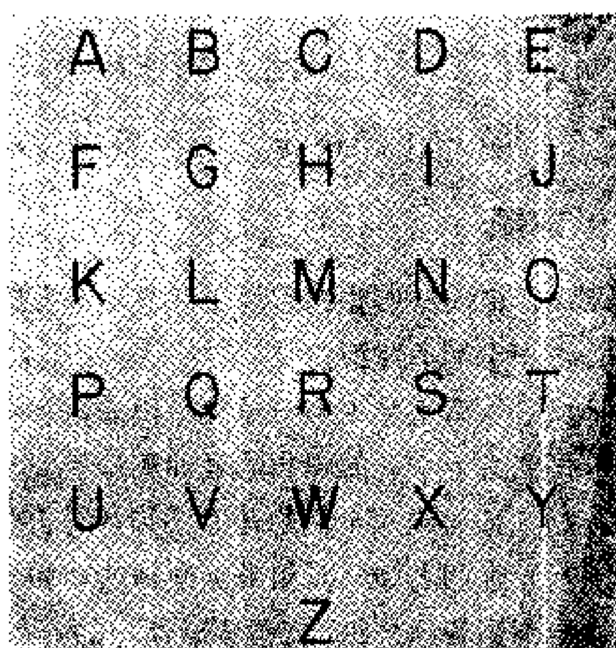


图 1.5

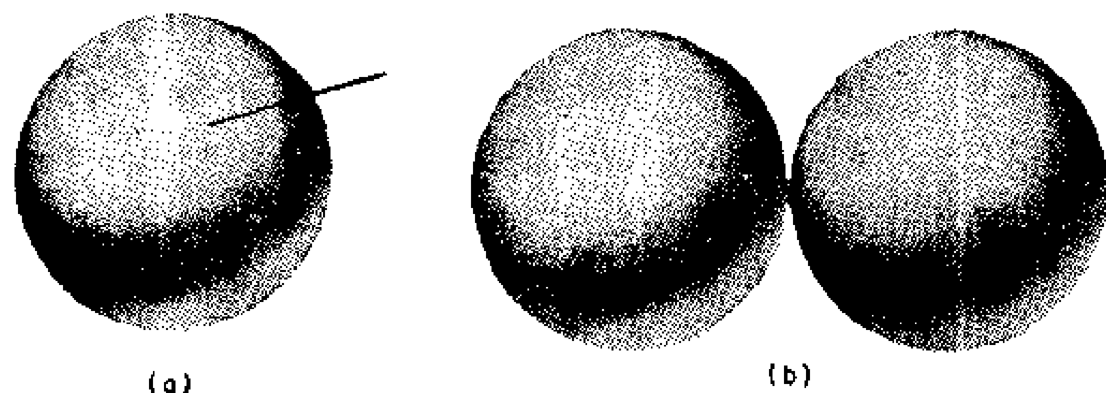
3-2 表面的分类

每个学生都知道一张普通的纸有两个面,有时他必须只在一面上写字,有时则可在两面上都写,在这一节中,我们将看到一些只有一个面的表面的例子,但首先必须稍微详细一点描述,我们所要考虑的到底是哪些表面.

像平面或球面一样,一个表面可以是"两维的";但是,伸出一根刺的球面(图 2.1*a*)或两个相切的球面(图 2.1*b*)的情况怎样呢?它们是表面吗?本节我们考虑一种叫做流形的特殊表面.一个流

形是一个连通的表面(即,一个"一整片"的表面),其中,极其靠近表面上任何一点的局部表面都拓扑等价于一开圆盘.这就是说,对表面上的每一点 p,此表面上所有与 p 点足够近的点构成一个与开圆盘拓扑等价的集合,这个由在表面上所有靠近 p 点的点所构成的集合叫做 p 的邻域.

图 2.1 中所示表面都不是流形,在图 2.1a 中,在刺上的点没有满足所需条件的邻域.在图 2.1b 中的表面上在接近两球面切点的地方不与圆盘拓扑等价.



(a) (b)

图 2.1

一个表面是"有界"的,当且仅当整个表面都包含在某个开圆球中.胎形是有界表面,平面不是有界表面.如果考虑一个表面的某一片特定部分时,这片表面的"边界"定义为把这一片与表面的其余部分分开的那条曲线.例如,把圆盘视为平面的一部分,圆盘的边界就是包围它的那个圆;平面上一个圆环的边界包括两个圆.注意,表面上的某一片的边界不完全取决于这一片本身,而且也取决于表面的其余部分,因为边界必须是两个集合的"划分者"或"边界".这一点可以用一个例子说清楚.如上所说,若将圆盘视为平面上的一部分,它的边界就是一个圆.假如我们把一个圆盘做为该圆盘本身的一部分来考虑,则表面上所有的点都在所考虑的这一部分里,于是当然不存在这一部分和表面上其余部分之间的"划分者".即,当把圆盘看做是它自身的子集时,它没有边界.在第

8-3 节中，我们将有对“边界”的一个更令人满意的定义．现在，我们只关心一些简单的情况，所以只要用直觉概念就够了．当我们说到一个表面的边界时，我们总是认为这已知表面是其自身自然延伸的那个表面的一部分，例如平面里的圆盘．注意到下面一点也是很重要的．即，尽管“有界的”(*bounded*)和“边界”(*boundary*)这两个词很相像，这两个概念却是根本不同的．一个球面和一个圆盘都是有界的表面，但是球面没有边界，而圆盘的边界是一个圆．一个平面是没有边界的无界表面；平面上的一细条是有两条平行线为边界的无界部分．一个表面是“封闭的”，当且仅当它是有界的且没有边界．一个球面是一个封闭的表面，因为它是有界的，并且我们可以在一个球面上自由运动而永远不会碰到一个边．另一方面，无论开的还是闭的圆盘都不是封闭的表面，因为它们都有包围着它们的圆做为边界．注意，在表面上“封闭的”一词的用法与第 2-1 节中关于网络之路径为“封闭的”的用法相同．在这两种情况下，它都是指运动不会为一个端点或一条边所阻止．(一个封闭的路径不要求有界性这一条件，因为所有路径都是有界的)．一个流形可以是也可以不是一个封闭的表面．球面是一个流形，它是封闭的；开圆盘也是一个流形，但它不是封闭的表面．闭圆盘不是一个流形，因为在边界圆上一点的靠近地方，其表面不拓扑等价于开圆盘．

有一个有趣的方法来表示某些流形．即把长方形的某些边粘合起来．例如，图2.2中，把长方形的两端粘合在一起，使得标记为 *AB* 的两条线段重合，并使图中的两个箭头方向一致．这个长方形所表示的流形就是一圆柱曲面．注意线段 *BB*，*AA* 代表圆柱表面两端的圆．在这两个线段(或圆)

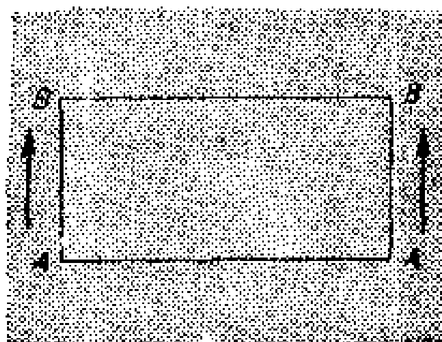
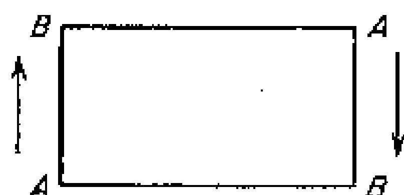


图 2.2

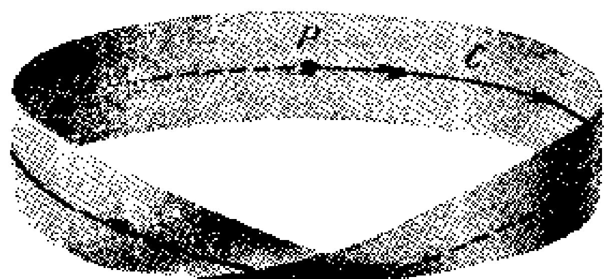
上的点不能包括在流形上，因为它们在表面上没有合适的邻域。圆柱的这种表示法有时很方便。因为它能平放在桌上而且立即可以看到表面的一个面的全部。

假设图 2.2 中的一个箭头倒过来，如图 2.3 所示。如果把长方形的一端扭 180°，然后将两端粘合在一起，使得标记为 AB 的两个线段重合，并且使两个箭头的方向一致，就得到一个叫 Möbius 带的流形(图 2.3b)。为了得到一个流形，必须像图 2.2 中那样，这



(a)

图 2.3



(b)

图 2.3 Möbius 带

个表面必须不包括图 2.3 中的两条水平线段。然而这两个线段不再代表两个圆了，这里它们代表同一单纯封闭曲线的两半。一个 Möbius 带只有一个面(*side*)，为了了解这一点，设想一只苍蝇从 P 点出发沿表面上的曲线 C 爬行，它沿着 C 的虚线部分回到 P 点。由于苍蝇既没有穿过表面，也没有绕过表面的边，所以它一定一直在表面的同一面，但是看起来，它是从表面上它所出发的"另一面"回到点 P 的。因此看起来是 P 点所在表面的两个不同的面，实际上只是此表面的同一面的两个部分。注意单面性 (onesideness) 与其说是表面的内在属性，倒不如说是它的外在的属性。这就是说，检验一个表面是否是单面的，不完全是在表面上进行的，而是使用了周围的空间。在上面苍蝇的例子中，我们已经默认：如果苍蝇走动时脚一直在表面上，并且不通过表面的任何边，则它的头的运动所经过的所有的点也一定在表面的同一面。如果表面是一 Möbius 带，这只苍蝇的头就能从任意接近表面的点运动到任何另一接近表面

的点，于是所有点都在表面的同一面，这表面是单面的．从习题 5 到习题 9 都与表面的内在性质有关，这个性质与单面性紧密相连．

图 2.4 给出一个面的表面的另一个例子．这个流形叫做克来因瓶(Klein)，它不可能在三维空间中造出来．图 2.4*a* 给出克来

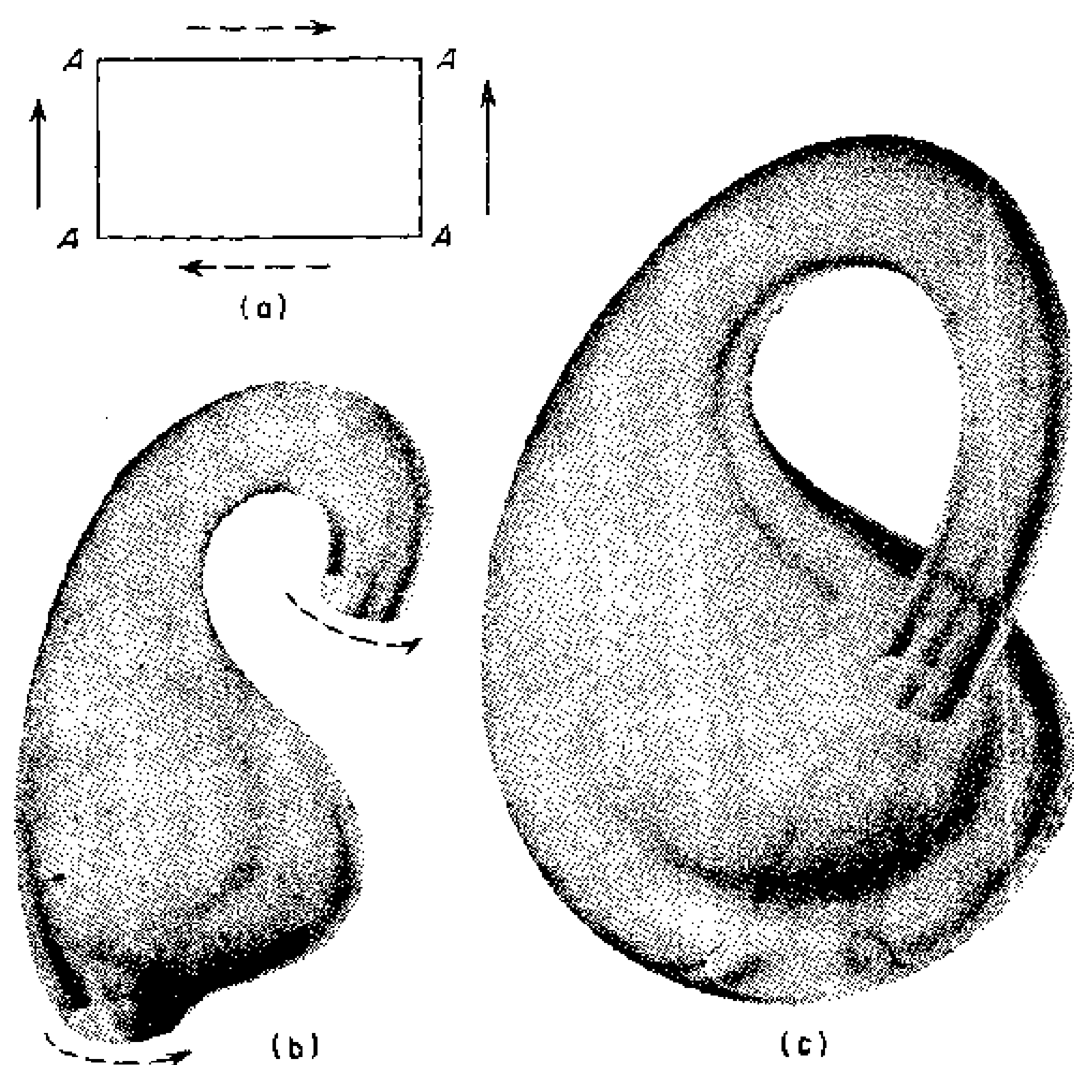


图 2.4 Klein 瓶

因瓶的表示：一个两对边分别粘合的长方形．用实箭头标出两条边的粘合给出一个圆柱形表面（图 2.4*b*）．它的两端还有待重叠在一起．这一步骤不可能在三维空间中进行．（如果 2.4*c* 所示）．圆筒的一端一定要戳过面而从里面与另一端相接．但是，这个表面在瓶颈通过面的地方不能与其自身相交（这就需要一个四维空

间来使得瓶颈“绕过”这个表面而不是“穿过”它).

下面的定理给出一个有趣的对封闭的双面流形的分类法. 类似的对单面流形的分类法可在所给的参考文献中找到.

定理 2.1 任一封闭的双面流形均拓扑等价于一个带有几个柄的球面.

证明: 本定理的证明超出本书的范围. 有兴趣的读者可以在参考 Brumfiel, Eicholz, Shanks 的书《Geometry》33 页定理 2 或参考 Aleksandrov 的书《Combinatorial Topology》vol. 1 第 110 页定理 7.2 中找到证明. ≪

习题

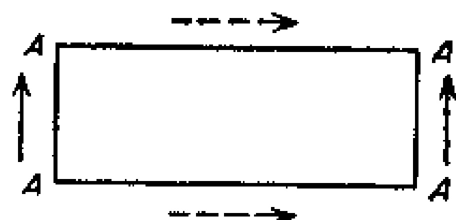


图 2.5

1. 将一长方形的边如图 2.5 所示的那样粘合起来, 它表示一个怎样的图形?
2. 对下列每一表面说出它是(i)封闭的或不封闭的, (ii)是一个流形或不是一个流形, (iii)单面的或双面的, (iv)有界的或无界的. 对每一个封闭的双面流形找出数字 p, 使得该表面拓扑等价于带 p 个柄的球面.
   (*a*) 一个平面,
   (*b*) 一个胎形,
   (*c*) 一个 Möbius 带,
   (*d*) 一个克莱因瓶,
   (*e*) 一个开圆盘,
   (*f*) 一个闭圆盘,
   (*g*) 图 2.6*a* 的表面,
   (*h*) 图 2.6*b* 的表面,
   (*i*) 图 2.6*c* 所示的有两个对顶着的圆锥表面,
   (*j*) 一把椅子的全部表面(横撑, 条板, 椅座, 靠背等).
3. 如图 2.7 所示的那样对圆柱表面和 Möbius 带进行试验: 在将两端粘合之前把一端扭几次, 然后沿虚线 c 切割表面. 扭的次数产生了什么作用?

(a)

(b)

(c)

图 2.6

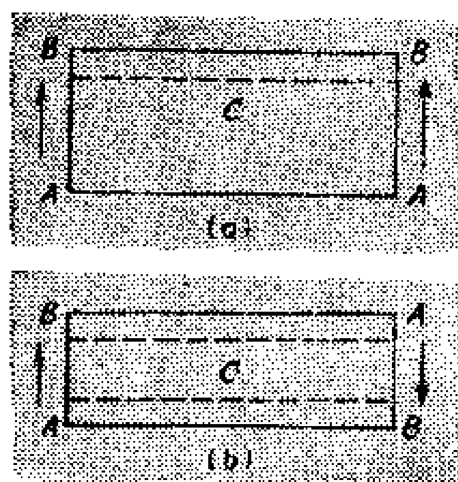


图 2.7

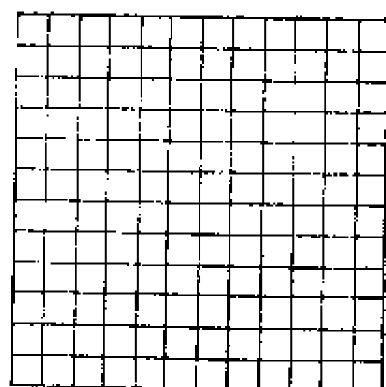


图 2.8

4. 有一种古老的东方游戏叫做五子棋，是两个人玩的．在一正方形板上横竖各画 13 条或 25 条线（图 2.8）．每个游戏者有他自己那个颜色的一

些棋子. 游戏者轮流走棋，将棋子放在横线与纵线的交点上，棋子一经放好就不得再移动. 首先将它的五个棋子放在同一行（水平的、垂直的或对角线的）相邻位置上的游戏者获胜. 由于试把这个游戏放在胎形(图 2.6)和 Klein 瓶(图 2.4a)上进行，这两个图形上的各个方向皆画上八条线.（因为它们的边有粘合的地方，为了方便起见，规定把棋子放在方格里而不放在线的交点处.）

5. (a) 试证：在一个 Möbius 带上可以选择一个绕点 P 的旋转方向，然后使 P 环绕这个表面运行，同时不改变绕这个动点 P 的原来旋转方向，使得当 P 点回到它的出发点时，绕点 P 的旋转方向与出发时选定的不同. 具有这种性质的表面叫做"非可定向的"；不具此条件的表面称做"可定向的".（提示：试沿图 2.9 中的虚线移动 P 点）

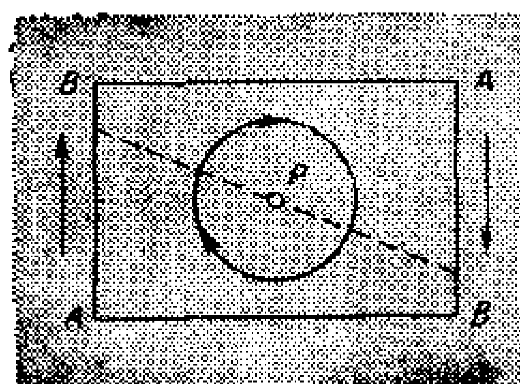


图 2.9

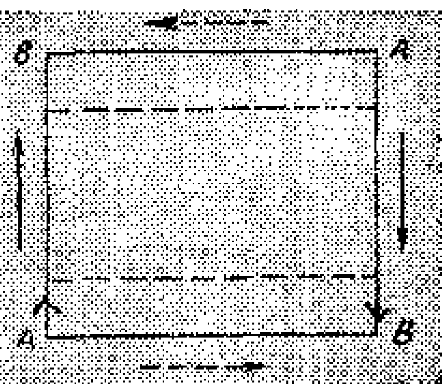


图 2.10

(b) 胎形是可定向的还是非可定向的？

(c) 克来因瓶是可定向的还是非可定向的？

6. 图 2.10 所示的表面是一个"投影平面"，尽管在投影几何课程中我们是从不太一样的角度来研究它的. 它拓扑等价于我们在投影几何课程中所学的一种表面.

(a) 证明：可将一投影平面视为一个圆盘和一条 Möbius 带，它们的边是粘合在一起的.（提示：沿图 2.10 中的虚线切割此投影平面）

(b) 此投影平面是可定向的吗？

(c) 此投影平面是一个流形吗？

7. 证明：一个包含在普通三维空间中的流形是可定向的，当且仅当它是有两个面的.（提示：考虑一只苍蝇在流形的表面上爬行，同时考虑对该苍蝇从头到脚的一个右手螺旋运动.）

8. 图 2.11 所示的表面是一流形吗？它是可定向的还是非可定向的？若沿一条环绕表面的曲线，并保持在所画的那条较高的线的下面，切割表面，将出现什么情况？若沿虚线 C 切割表面将会出现什么情况？

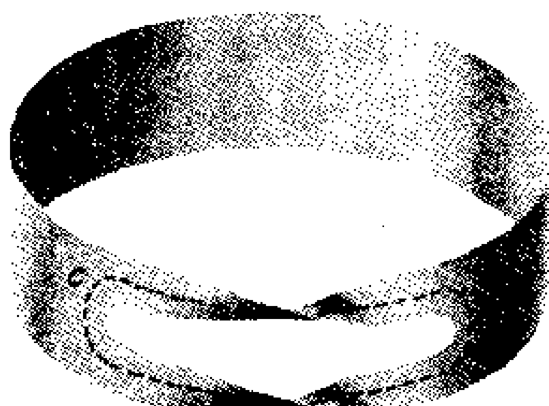


图 2.11

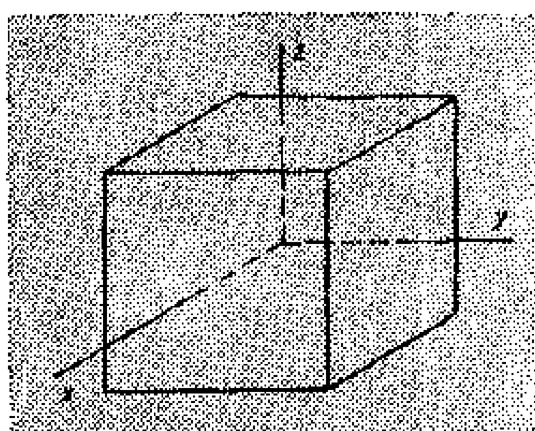


图 2.12

*9. 图 2.12 所示为一个边长为 2 个单位长度以原点为中心的立方体. 我们照下列规则使该立方体表面上的点对（*pairs of points*）粘合：在 $x=1$ 的面和 $x=-1$ 的面上，粘合那些以 z 轴为对称轴的点对. 即粘合所有点对 $(1, y, z)$ 与 $(-1, -y, z)$. 在 $y=1$ 的面和 $y=-1$ 的面上，粘合那些以 x 轴为对称轴的点对. 即粘合所有点对 $(x, 1, z)$ 与 $(x, -1, -z)$. 在 $z=1$ 的面和 $z=-1$ 的面上，粘合那些以 xy 平面为对称面的点对. 即粘合所有点对 $(x, y, 1)$ 与 $(x, y, -1)$.

现在我们得到一个立体，对于它的每一点，它的邻近空间均拓扑等价于球. 这样的立体叫做三维流形. 然而这个三维流形是以特殊方式扭曲的. 下面考虑由这个立体与三个坐标面相交而得到的三个表面.

(a) 其中哪个表面是可定向的？

(b) 其中哪个在这立体中是单面的？（提示：设想一只苍蝇用脚在表面上面走动，找出它的头所经过的可能的轨迹.）

(c) 对由所有坐标满足等式 $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$ 的点所组成的表面进行同样的讨论.

肆

带柄的球面上的地图

4-1 引言

在第 2-3 节中我们定义地图为一个网络连同包含该网络的表面．我们还讨论了平面地图的某些性质．在第三章里，我们讨论了更一般化的表面并阐明任何封闭的双面的表面拓扑等价于带几个柄的球面．在这一章里，我们将讨论在这些更一般化的表面（带几个柄的球面）上的地图．由于平面上的四色问题尚未解决，那么读者可能会怀疑，对这些更一般的表面上地图着色问题，所了解的东西会非常少．惊人的是，已经证明在这些更为一般化的表面上地图着色问题却更为容易解决．节 4-4 给出胎形上地图着色问题的解决办法．

4-2 单连通集合

在一已知表面上的任一地图，地图的面（*faces*）乃是这已知表面被（地图的）网络中的弧所分割成的那些分离的小片表面．因而，地图的任意一个面都是表面上一小片连通的部分．这种连通小片称为**单连通的**，当且仅当该片上的任一单纯封闭曲线可以畸变（*deformation*）† 为此片上的一点．即，在畸变过程中，曲线必须始终留在该片上．

---

† 畸变（*deformation*）：拓扑学中常用的一个专有名词．此处可直观地理解如下：在一拉紧了的橡皮片上画一单纯封闭曲线，然后逐渐地放松，这时它上面的图形的变化（或变形）就称为畸变．若设想橡皮可无限收缩，而曲线中间无洞，则此曲线就有可能畸变成一点（直观的近似）．——译者注

图 2.1a 证实了一圆盘是一个单连通集合，因为圆盘上任意单纯封闭曲线 C 可畸变为圆盘上的一个点. 另外，一个油炸圈饼或一个环状的区域(图 2.1b)不是单连通的，因为曲线 C 不能在不离开该区域的条件下畸变为一个点. 一个平面或一个球面也是单连通集合的例子. 胎形不是单连通的. 注意使曲线变成一个点的畸变过程不是弹性运动，因为这一变形使曲线上不同的点融合为同一点.

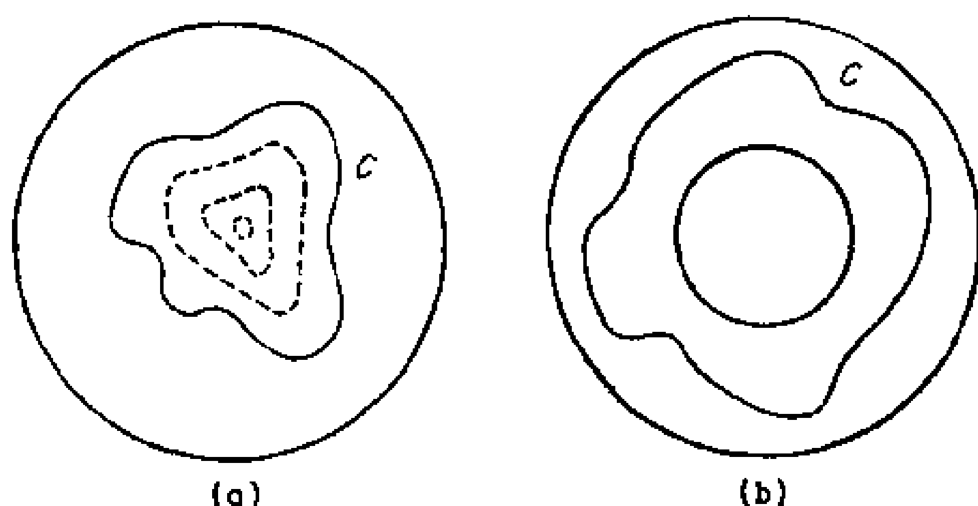


图 2.1

当然，即使在一个不是单连通的连通集合中，也会有一些可以畸变为此集合上的一点的单纯封闭曲线. 如果有一种方法可以改变这样的集合，使得其上只存在这些可畸变为集合上一点的单纯连通曲线，则这个集合就可变为单纯连通的. 这种变化方法一般是从集合上移去某些弧，这些被移去的弧称做切割线. 图 2.2 所示的是一单连通集合，它是由在图 2.1b 所示的油炸圈饼上进行一次切割而得到的. 从油炸圈饼上移去这一切割上的所有的点，使得该集合中任意单纯连通曲线都可畸变为集合中的一点.

有一些连通集合(图 2.3)，它们需要进行两个切割才能变为单连通集合. 很容易明白，怎样就能得到需要三次、四次或任何多整数次的切割，才能变成单连通集的集合.

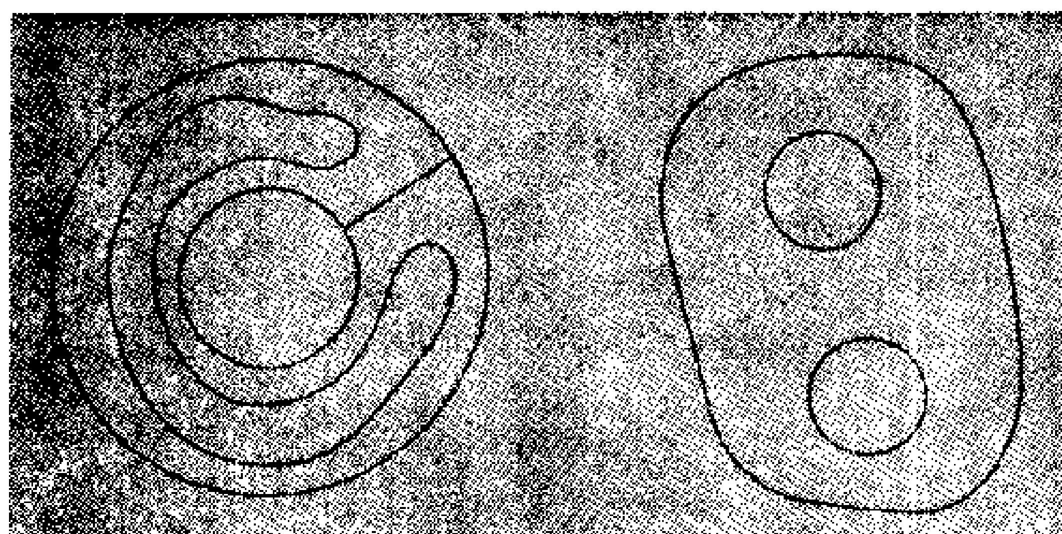


图 2.2　　　　图 2.3

但是任意连通集均可由数次切割变为单连通集这一结论却不是明显的. 困难之处在于，一个单连通集合必须是连通的. 可以想像得到的是，为得到单连通集合所需要进行的切割，可能使该集合分离为两片或更多片. 我们将假设，任何封闭的双面表面上的地图上的各个面，都可以由一些切割变成单连通的.

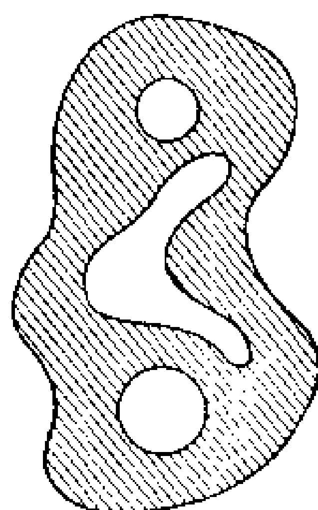


图 2.4

对于图 2.1 和 2.3 中的集合，很容易看出，当引入一切割使得表面成为单连通之后，任何附加的切割都将使表面不连通；即，任何附加的切割都使表面分离为两片. 我们假设有下列结论：在一个封闭的双面流形上，一个单连通集合中的任一切割必分离该集合为两个单连通小片.

习题

1. 下列哪些表面是单连通的？对每个不是单连通的表面进行切割，使它

变成单连通的，并验证任何附加切割均会使表面分裂为两个单连通的小片.

(a) 胎形，

(b) 球面，

(c) 带两个柄的球面，

(d) 图 2.4 所示的球面的一部分，

(e) 图 2.5 所示的带三个柄的球面上的地图的各个面.

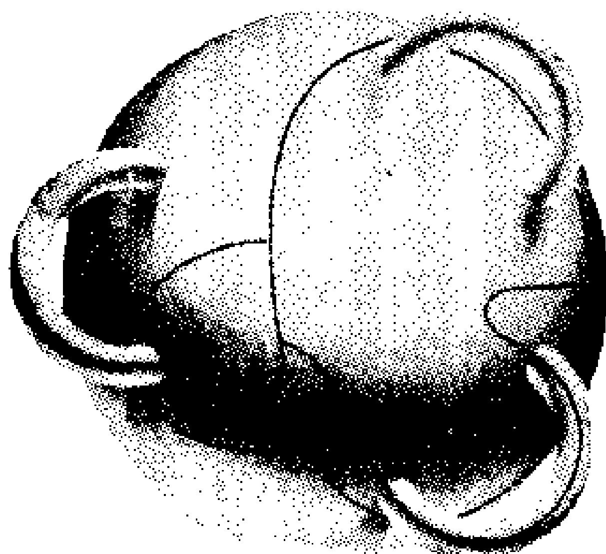


图 2.5

4-3 尤拉定理

本节我们将证明带 p 个柄的球面这种一般情况下的尤拉定理(定理 3.3). 为简便起见，首先考虑球面本身(意即不带柄的)，并用平面上的尤拉定理(第 2 章中定理3.1)得出球面上的尤拉定理. 有好几种方法可以将球面上的地图与平面上的地图联系起来，其中最简单的联系方法是由图3.1所示的极点投影 (*polar projection*). 平面与球面在点 S 处相切，点 N 与点 S 在同一直径上的不同端，即 N 与 S 是一球面直径的两个端点. 对于球面上任何不是 N 点的 P 点，过 N 和 P 的直线与平面恰有一交点 Q. 反过来说，对平面上每一点 Q，过 Q 与 N 的直线与球面相交恰为一不为 N 的点

P. 这样,我们得到球面上的点与平面上点间的一个对应. 球面上的点 S 对应于平面上同一点 S. 球面上的点 N 不与平面上的任一点对应,但 N 是球面上不与平面上任一点对应的唯一点. 这种点-点的对应叫做从 N 的极点投影. 点 N 叫做投影极.

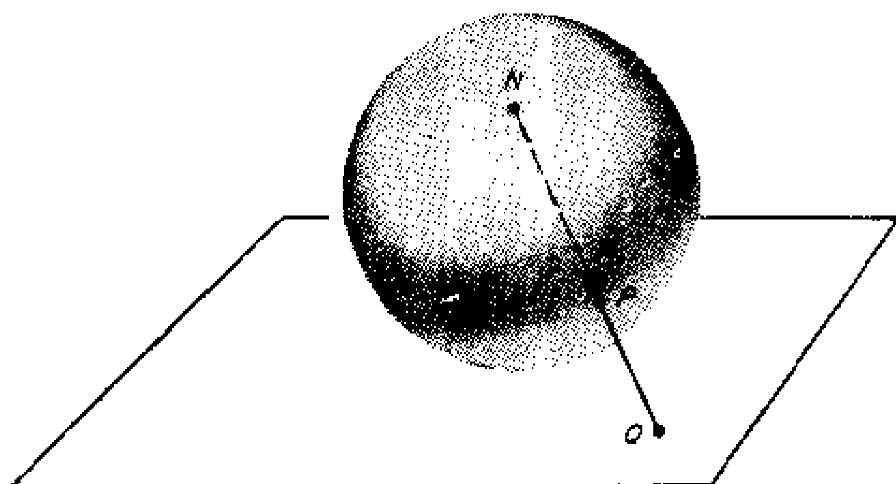


图 3.1　球面到平面的极点投影

选出球面上任一不在地图网络上的点 N, 从 N 进行极点投影,就可以使球面上任一地图转换到平面上去. 反过来讲,平面上的任何地图可用极点投影转换到球面上,其中投影极不在球面的网络里. 实际上,极点总是位于和平面地图的"外部"面(*face*)对应的面上.

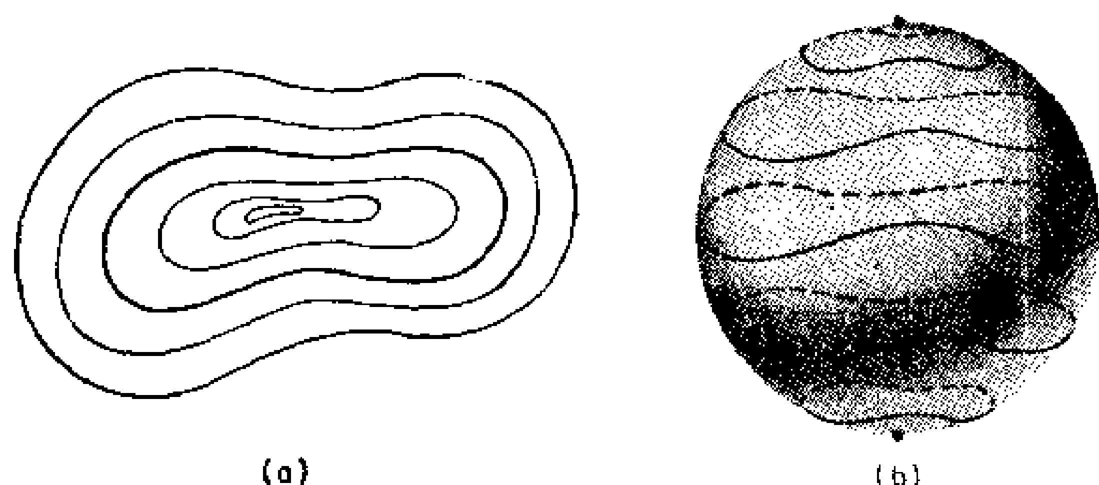
定理 3.1　(尤拉)若球面上一连通地图有 V 个顶点、E 条边,F 个面,则

$$V-E+F=2.$$

证明: 球面上任一连通地图可用一极点投影转换成平面上的一连通地图,且这两个地图有同样数目的顶点、边和面,则从第二章定理 3.1 可推出这里的结论.

我们屡次用到一个事实,即圆或平面上任意单纯封闭曲线将平面分为三部分——曲线内部、曲线外部及曲线本身. 球面上的任意单纯封闭曲线也将球面分为三部分——两个区域及曲线本

身．但平面上和球面上的情况有一不同之处：在平面上，一个单纯封闭曲线可畸变为曲线内部的一个点，但不能畸变为曲线外部的一个点．在球面上，一个单纯封闭曲线可畸变为球面上除了曲线本身外的两个区域中任一区域上的一个点．这些事实已由图 3.2 表示出来了．这一结论恰巧说明球面与平面不是拓扑等价物．因为我们已经找出一种拓扑性质使得它们相异．这一结论并不出人意料．



(a) (b)

图 3.2

从上述讨论可以得到另一个有趣的结论，它由下面的定理阐述出来．

定理 3.2 球面上一地图的各个面皆为单连通，当且仅当地图是连通的．

证明： 给定球面上的任一地图，其中有一个面 f 不是单连通的．我们来证明此地图不是连通的．实际上，存在一单纯封闭曲线 C，它完全在 f 内部（C 不包含网络上的点），且 C 不能畸变为 f 中的一个点．现在若将 C 从球面上截去，球面就剩下两个区域 A_1 和 A_2．因为 C 可以畸变为这两个区域的任一区域中的一个点，所以 A_1 和 A_2 都不能完全包含在 f 中．用 A_i 代表区域 A_1 或 A_2．已经证明 A_i 包含面 f 上的点和地图上其它面上的点，因此 A_i 必包

含网络中构成两个面之间的边界的某一部分. 但是, 若网络的某一弧上的任意一点在 A_i 内, 则这整条弧必在 A_i 内, 因为 A_i 的界线 C 不包含网络上的点. 这样, A_i 包含网络的一整条弧并因此必须包含网络的一个顶点. 令 a_i 为网络的包含在 $A_i(i=1, 2)$ 中的一个顶点, 则网络上不存在以 a_1 及 a_2 为顶点的路径, 因为这样的路径一定得穿过 C. 由此证明网络不是连通的.

另一半逆定理的证明留做练习(习题3). ≪

定理 3.2 说明球面上连通地图的各个面都是单连通的. 对于平面上或带 p 个柄($p>0$)的球面上的连通地图, 此结论不成立. 然而, 如果将地图是连通的这一前提换成每个面是单连通的, 则尤拉定理可推广到带柄球面上的地图上.

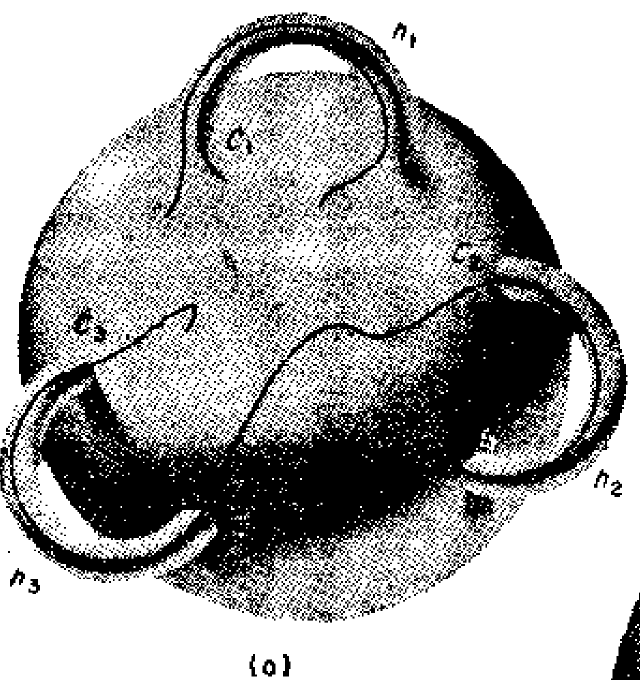
定理 3.3(尤拉) 若带 p 个柄的球面上的地图有 V 个顶点, E 条边和 F 个面, 且每个面是单连通的, 则

$$V-E+F=2-2p.$$

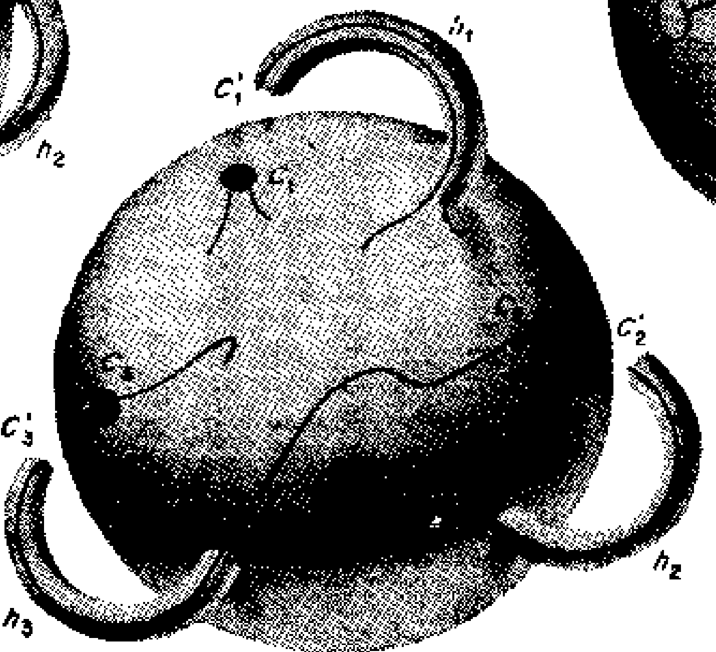
证明: 在开始证明之前, 我们先做出两个预备的论述.

第一, 注意我们要证明的这个方程式是表示地图的一个拓扑性质. 在证明这一结论的过程中, 可以使用任一弹性运动随意改变这个地图, 并且只要我们能证明对于改变了的地图来说此等式成立, 则它一定也对原地图成立. 在证明过程中所使用的弹性运动将使整个表面仍保留原来的形状与位置, 但这一运动要延展或缩小地图的某些面, 从而使某些个别的点运动到表面上不同于它原来位置的地方去. 我们把这种弹性运动叫做“使网络在表面上滑动的运动”. 但是, 当然, 在实际的弹性运动中, 表面是与网络一起滑动的.

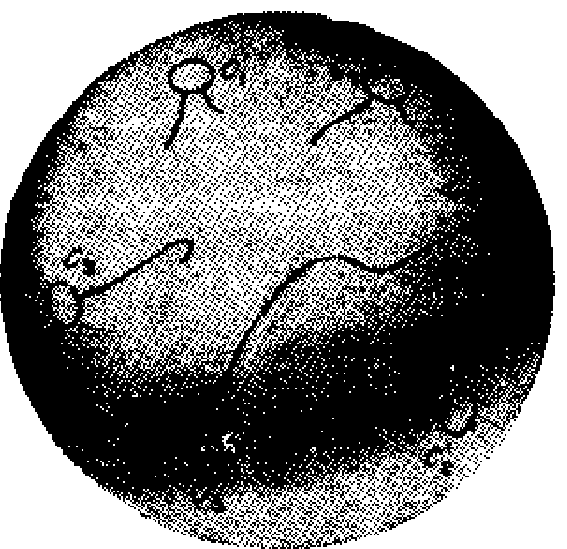
第二, 注意, 只要能够满足下列要求, 我们就能够任意地改变地图(网络或表面). 要求是: 对于新的地图(有 V' 个顶点, E' 条边和 F' 个面), $V'-E'+F'$ 之和与 $V-E+F$ 的值相等. 实际上,



(a)



(b)



(c)

图 3.3

我们甚至可以允许对地图进行使得 $V'-E'+F'\neq V-E+F$ 的变化，只要我们记住这个表达式的值的改变，并在最后的结果中把这个改变算进去就行了.

现在可以对定理 3.3 进行证明了. 图 3.3 举例说明了带三个柄的球面的情况. 图中只给出网络的一部分. 我们来考虑在带 p 个柄的球面上的任意地图，它的各个面都是单连通的 (图 3.3a)，并假设网络已经在表面上滑动过了，而使得它的任何顶点都不在柄与球面相接处的圆上；并且使得任何柄与球面相接的圆都不与网络的弧有公共线段. 因为地图的每个面都是单连通的，于是任何一个面都不可能包含着任何一个柄圆截面. 这样，对于每个柄，网络中至少有一条路径要沿着柄的纵长方向行进(图 3.3a 给出柄 h_1 上两条这样的路径及柄 h_2 和 h_3 上各一条这样的路径).

现在，对地图连续进行三次变换，对其中每一次变换，有:

$$V'-E'+F'=V-E+F.$$

首先在网络上增加顶点. 对每个柄 h_i，选择柄与球面相接的圆 c_i，并且在网络与任何圆 $c_i(i=1,2,3,\cdots,p)$ 相交处放上一个顶点. 每个新加的顶点使原来的弧变为两个小弧. 于是，如果我们令 n 代表网络上增加的新顶点的数目，则所增加的边数也为 n，而面的数目不变.

第二步，在网络上增加新的弧. 沿着每个圆 c_i 被新顶点(前一变化所增加的)所分割成的弧增加新弧. 在每个圆 c_i 上，所增加的弧的数目等于前一次变换中所增加的顶点数. 于是，所增加的弧的总数为 n. 这些弧中的每一条都是地图中的一个单连通面的切割. 这样，每条新增加的弧都将一个面分为两个较小的单连通面，从而使得面数增加 n；同时顶点数目保持不变.

第三步，沿每一个圆 c_i 切割表面，并将柄的割断端拉得稍微离开球面，使得这些柄成为从球面表面上突出来的管子(图3.3b).

同时，由于在柄 h_i 割断端复制了 c_i 的顶点和弧，我们就更改了网络。复制的 c_i 记为 c_i'。在这第三次变化的地图中，一共增加了 n 个顶点，n 条边，没有增加面。现在这个表面上有 p 个圆洞和 p 个一端开口的管子粘在表面上面。地图上现在有 $V+2n$ 个顶点；$E+3n$ 条边和 $F+n$ 个面。

最后一步，我们对地图进行变化，使得 $V'-E'+F'\neq V-E+F$。我们将每个管子缩回到表面上，得到一个有 $2p$ 个圆洞的球面。将这些洞填满——给地图增加 $2p$ 个开圆盘状的面。现在我们得到一个球面上的地图，它有 $V+2n$ 个顶点，$E+3n$ 条边和 $F+n+2p$ 个单连通面。由定理 3.2 和这个球面上的地图是连通的。于是，由定理3.1，有：

$$(V+2n)-(E+3n)+(F+n+2p)=2,$$

或：

$$V-E+F=2-2p. \ll$$

习题

1. 考虑地球的极点投影，它的投影极 N 为北极。
   (*a*) 球面上的纬线在平面上的象是什么？
   (*b*) 球面上的经线在平面上的象是什么？
   (*c*) 球面上既不是经线也不是纬线的圆在平面上的象是什么？
   (*d*) 其在平面上的象是直线的球面上的曲线有何特点？
2. 找出球面上一个不连通地图，其中 $V-E+F\neq 2$，对球面上的地图来说 $V-E+F$ 的可能值是什么？
3. 证明：若球面上一地图的每一个面都是单连通的，则该地图是连通的。
4. (*a*) 证明不存在一个其各个面都是单连通的平面地图。
   (*b*) 举例证明对任何 $p>0$，带 p 个柄的球面上存在一连通地图，它有一个面不是单纯连通的。
5. 图 3.4 给出一个带两个柄的球面上的地图。
   (*a*) 地图上 V，E，F 的值各是多少？
   (*b*) 它的每个面都是单连通的吗？

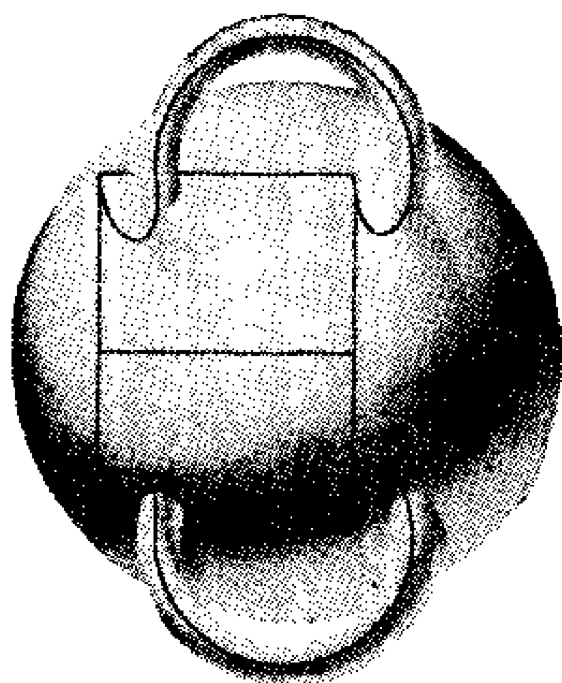


图 3.4

(*c*) 说明不可能滑动这个地图上的网络，从而使得对两个柄中的每一个来说，有一个它与球面相接处的圆是由网络的数条弧组成的.

(*d*) 对于定理 3.3 的证明，证明对某些地图来说，对它们所进行的前两个变换可由地图在表面上的一些滑动来代替. 但要证明，这一代替并不适用于所有地图.

6. 在节 3-2 中我们已知一个与带一个柄的球面拓扑等价的胎形可由一个其各边以特定方式粘合的长方形来代表. 说明图 3.5*a* 和 3.5*b* 都代表

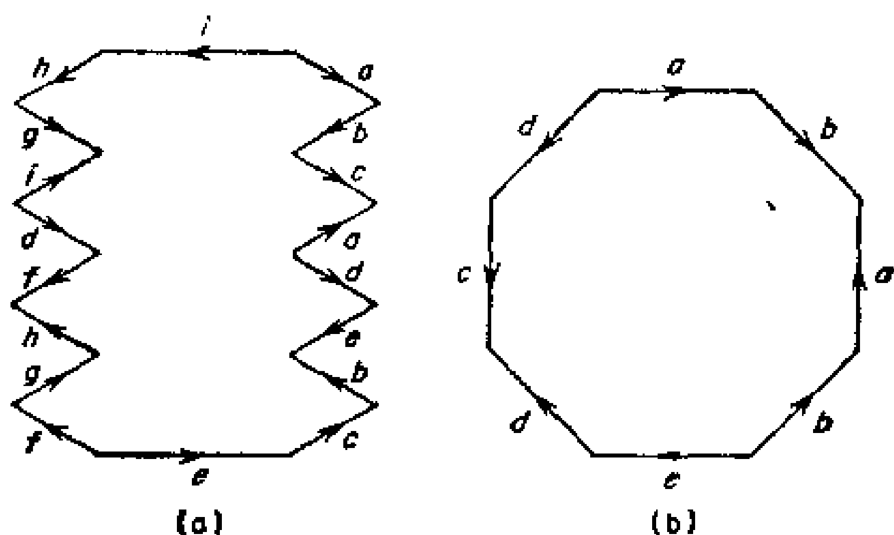


图 3.5

一个有两个柄的球面.（提示：沿网络的弧切割图 3.4 得到图 3.5a；简化图 3.4 中的地图并再次切割它，得到图 3.5b.）在这两图形中的每一个上标有同样的字母的两个边要粘合在一起，并使得两个箭头方向一致.

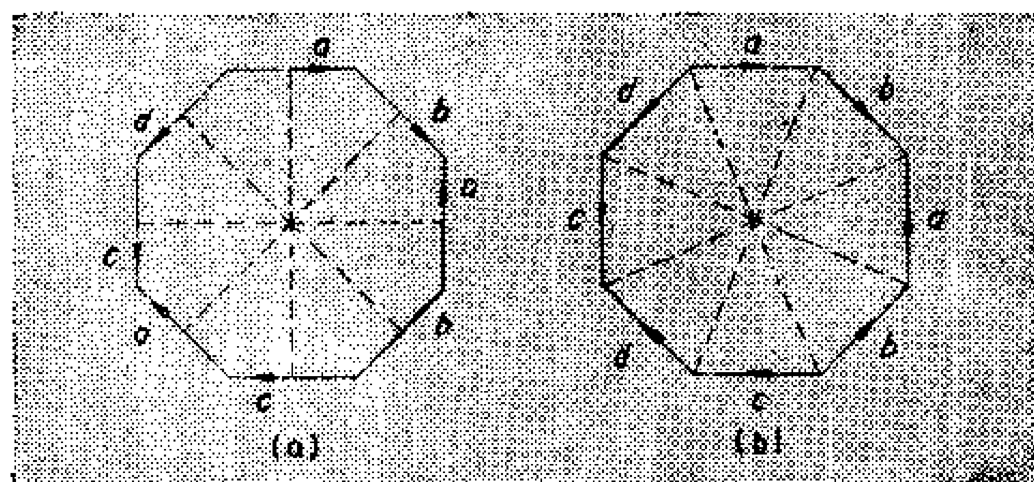


图 3.6

7. 图 3.6a 和图 3.6b 都代表了一个带两个柄的球面上的地图(只有虚线是地图的边). 将这两个地图各自画成如图 3.4 中的形式.
8. 图 3.4 和图 3.7 都表示带两个柄的球面上的一个地图, 试用类似图 3.6 的形式来代表它们.

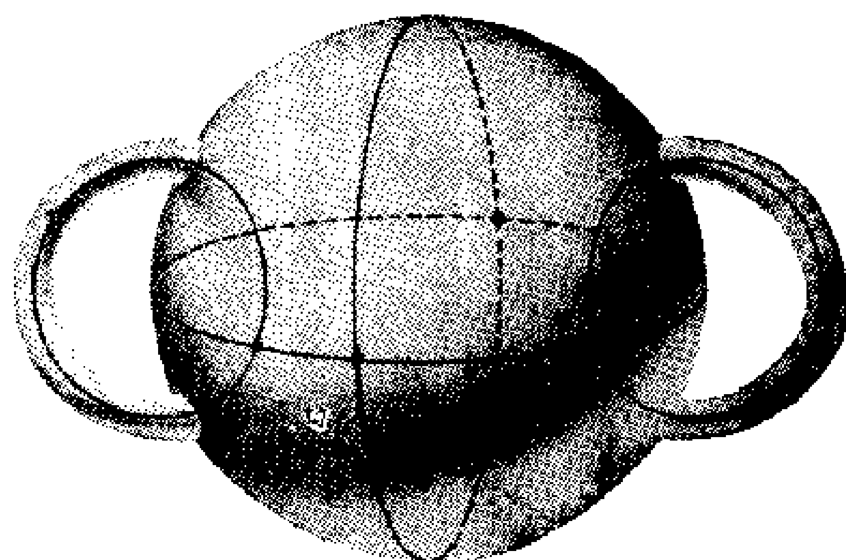


图 3.7

4-4 胎形上的七色定理

在第 2-3 节中，我们已经证明了，任何平面地图均可用五种颜色着色. 同时我们也提到，到现在为止还没有发现实际上需要用五种颜色才能着色的平面地图. 由此，对任何平面地图的着色问题来说，其所需要的颜色的最小种数我们并不准确知道. 在第 4-3 节中，对极点投影的讨论证明了，可将平面地图移到球面上，或将球面地图移到平面上. 这就意味着，对球面上地图的着色问题，其解决的情况恰与平面地图的情况一样. 相反的，对于较复杂的表面，比如就胎形来说，这个问题却完全解决了.

定理 4-1 胎形上任一地图可用七种颜色着色，并且在胎形上至少有一个地图需要用七种颜色着色.

证明: 设计一个实例，证明地图确实需要七种颜色着色. 将此证明留做练习(习题 1).

对七种颜色是充分条件的证明基本与五色问题中这一部分的证明一样. (第 2 章定理 3.5 和它前面的引理). 我们这里省略了一些细节.

首先，我们将只注意那些其所有的面都是单连通的地图. 因为如果给我们以胎形上的一个地图，它的某些面不是单连通的，我们则可以对它进行切割从而使它的所有的面都变成单连通的. 如果这张改变了的地图可以用七种颜色着色，那么只要抹去那些割线就可使原地图能被七色着色.

第二，我们可以只考虑那些有单连通面的正则地图. 这是因为任何秩不为 3 的顶点都可以被扩张成一个小的开圆盘(它是单连通的). 而且，若这一新地图可以用七色着色的话，则原地图也可以.

第三，胎形上的每个其各面都是单连通的正则地图至少有一

个面具有六条或少于六条的边．实际上，若此图有 V 个顶点，E 条边和 F 个面，其中 n_i 个面有 i 条边，则，

$$n_1+n_2+n_3+\cdots\cdots=F$$

并且弧端的总数为 $2E$ 或 $3V$，因此，

$$2E=3V.$$

由定理 3.3

$$V-E+F=0.$$

因为网络中每一条弧都最多只能是两个面的边，

$$n_1+2n_2+3n_3+\cdots\cdots\leqslant 2E$$

从上述的几个关系式中消去 V、E 和 F，有：

$$5n_1+4n_2+3n_3+2n_4+n_5-n_7-2n_8\cdots\cdots\geqslant 0$$

所以，由 n_1 到 n_6 至少有一个数必为正数．

第四，除去一些显而易见的情况外，胎形上任一地图的每一个面至少有一条边将此面与另一个面分开．

第五点，也是最后一点，对地图的面的数目进行归纳即可完成这一证明．如果地图有七个或少于七个的面，结论是明显的．假设胎形上每一有 k 个单连通面的正则地图可用七种颜色着色．那么考虑胎形上有 $k+1$ 个单连通面的地图．选出该地图的一个面 f，它有六条或少于六条的边，并选出 f 的一条边 e，它将 f 与另一个面分开．移去边 e，用通常省略顶点的办法，来保持地图是正则的．地图的这一改变使它成为有 k 个单连通面的正则地图．由归纳法假设知这一新地图可用七种颜色着色．当把 e 边重新放到地图上面恢复原地图时，肯定至少有一种颜色可以用来着色 f 面，因为与 f 面有一条公共边的那些面最多能用六种颜色．

习题

1．给出胎形上一个有七个面的地图，它的每个面与其它六个面各有一公共

边. 证明这个地图需要七种颜色才能着色. 胎形可用第三章中图 2.6 所示的那样由两对边分别粘合的长方形来表示.

2. (*a*) 证明:除显而易见的情况之外, 胎形上一地图的每个面至少有一条边将它与另一个面分开. 那些显而易见的例外是什么?

(*b*) 试证: 当如定理 4.1 的证明中所述的那样将边 e 从地图上移去时, 新地图的 k 个面中,每一个面都是单连通的.

3. 对图 4.1 中所示的胎形上的地图完成定理 4.1 的证明步骤. 图中的胎形皆由两对边各自粘合的长方形表示,而地图的网络皆由虚线表示.

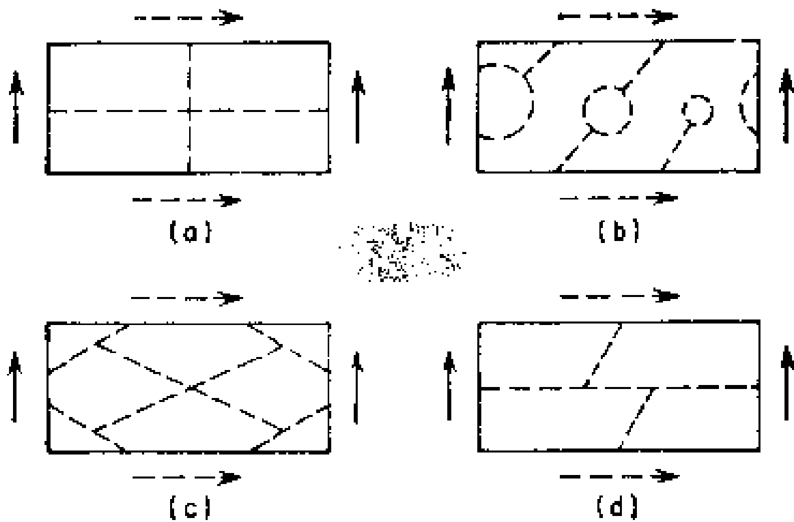


图 4.1

伍

约当曲线定理

5-1 引言

约当(Jordan)曲线定理是拓扑学经常要用到的重要结论．在前面的工作中，我们已经几次使用它了．粗略地说来，这个定理认为平面上一单纯封闭曲线有一个内部和一个外部．更准确地说，若一单纯封闭曲线C是在一平面上，且C上的所有点都从平面上移走，则平面所剩余的部分恰由两个连通部分组成，而曲线C分别是这两部分的界线．直观地说，就是不可能不通过曲线C而从这两部分中之一部分到达另一部分．

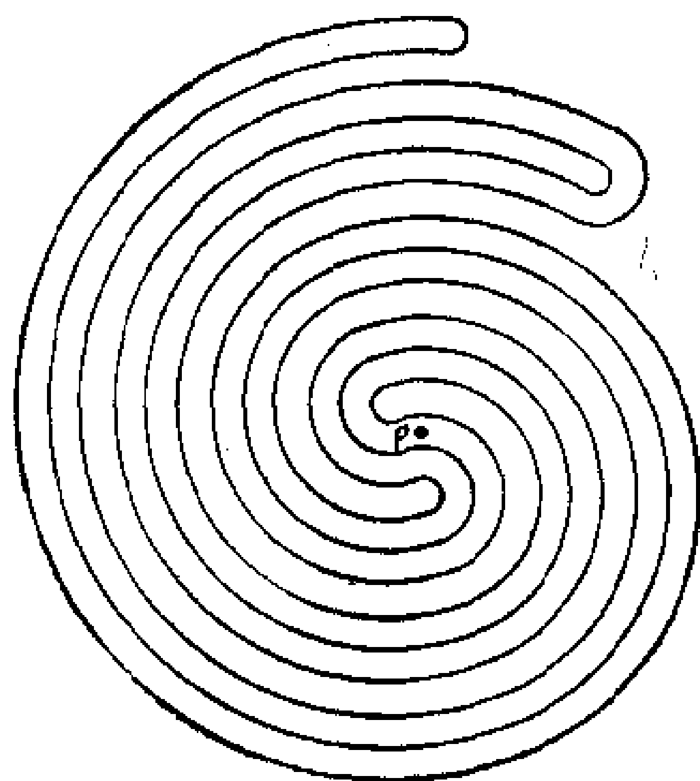


图 1.1

这一结论对平面上的一个圆来说显然是成立的. 同样明显的是, 任何弹性运动都会保持曲线的内部和外部均为连通的, 且这两部分仍以该曲线为其界线. 然而, 现在让我们来看一个例子. 图1.1给出平面上一单纯封闭曲线, 点P是在曲线的内部还是外部? 当然, 可以画出比图1.1所示的更为复杂的曲线来, 那么我们怎样才能在任何情况下确定一特定的点——不是在图1.1所示的这样的曲线上——是在曲线的内部还是外部呢? 有什么可供应用的测定方法吗? 对Jordan曲线定理的一般的证明超出本书范围. 下一节只给出它在多边形情况中的证明.

5-2 约当定理在多边形情况下的一个证明

在证明多边形特殊情况下的Jordan曲线定理前, 我们必须确切地理解什么是多边形. 令$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$为平面上一串$n$个点的点列, 其中有些点可以重复出现, 不过我们要求此点列中互相毗邻的一对点a_i, a_i+1是相异的两点, 因而它们可以决定着唯一的线段. 以$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$为顶点的多边形路径乃是指$a_1a_2, a_2a_3, \cdots\cdots, a_{n-1}a_n$这$n-1$个线段的序列. 此路径称为连接$a_1$和$a_n$两点. 如果$a_1$与$a_n$为相异两点, 则所谓以$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$为顶点的"多边形"乃是指$a_1a_2, a_2a_3, \cdots\cdots, a_{n-1}a_n, a_na_1$这$n$个线段的序列. 其中这些线段称为此多边形的边. 一多边形为"单纯的", 当且仅当其所有的顶点皆互不相同, 并且任意两边除了可能在它们的端点上相交外皆不相交.

我们现在就可以论述我们即将证明的Jordan曲线定理的特例.

定理2.1(Jordan) 若S为任一平面P上的单纯多边形, 则P上所有不在S上的点可用以下的方法分成A和B两个集合: 同一集合的两点皆可用一不与S相交的多边形路径相连接, 而任意两

点，其中一点在A集合中，另一点在B集合中，则不可能如此相连接.

证明: 在平面P上选择一个方向，它不平行于多边形S的任何一边. 对平面上任一点x，我们用H_x表示以x为起点以选定的方向为方向的半线(即射线). 也就是说，H_x是这样的点集，这些点是在过点x平行于选定方向的直线上且位于x的一侧，即选定方向所指向的那一侧. 这个方法由图 2.1 中的图例说明. 现在令A为平面上所有这样的点x的集：x不在S上，H_x与S相交偶数次. 同样，令B为平面上所有这样的点的集，这些点不在S上，其半线与S的交点为奇数个. 在计算半线与S的交点数时，有一种特定的规则来计算与S的顶点相交的交点数. 如果多边形于顶点处跨越半线(成交叉状)，则这个交点就要计数；但是如果多边形不在顶点处跨越半线，则这个交点就不计数. 由此，图 2.1 中H_x与S有两交点，而H_y与S就只有一个交点.

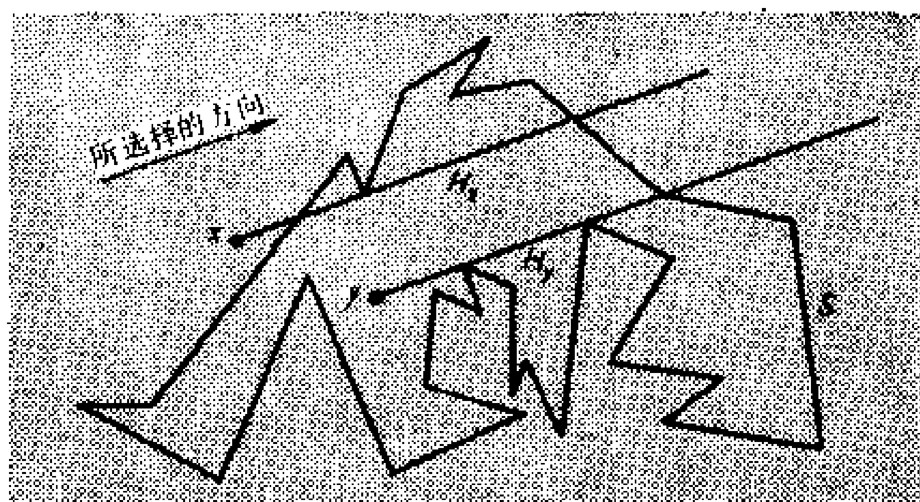


图 2.1

现在，如果点x沿着一条不与S相交的线段移动，则H_x与S的交点数仅当H_x移动到经过S的某一顶点时才可能改变. 但是，对这两种情况：(1)S于这个顶点处穿过H_x和(2)S不在该顶点处穿过H_x考虑后可知，H_x与S的真正交点数虽然可以改变. 但这

个数不能由奇数改变成偶数，或由偶数改变为奇数．由此可知，任一与S不相交的线段上所有的点(并且因此是任意不与S相交的多边形路径上所有的点)皆在同一个集合A或B里．这就证明了，A里的点都不能够与B中的任一点用一多边形路径相连接．

我们只剩下要证明：若p和q为同在A里或同在B里的两点，则p与q可用一不与S相交的多边形路径相连接．考虑线段pq(图 2.2)．若这一线段不与S相交，那么它就是合乎需要的路径．若此线段与S相交，则可选一多边形路径如下：沿着线段pq走到快到第一个交点之前，然后沿着靠近S的两边的线段走(可是不穿过S)一直到接近pq与S的最后一个交点之前，再沿着线段pq的一部分前进到q点．证明这是一个不与S相交的多边形路径留作练习(习题 2)．≪

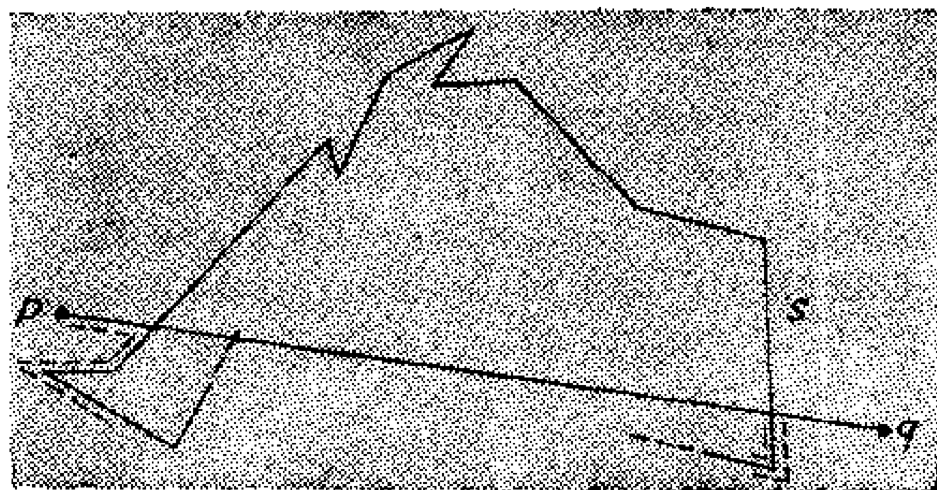


图 2.2

习题

1. 图 2.3 中哪些图表示多边形路径？哪些图表示多边形？哪些图表示单纯多边形？在每一情况中指出哪些点为顶点；对同一图选择不同的顶点是可能的吗？
2. (a) 试证：S不与定理 2.1 的证明结尾中所造的多边形路径相交．(提示：由证明的第一部分，所有沿着这一路径上的点必须位于集合A与B

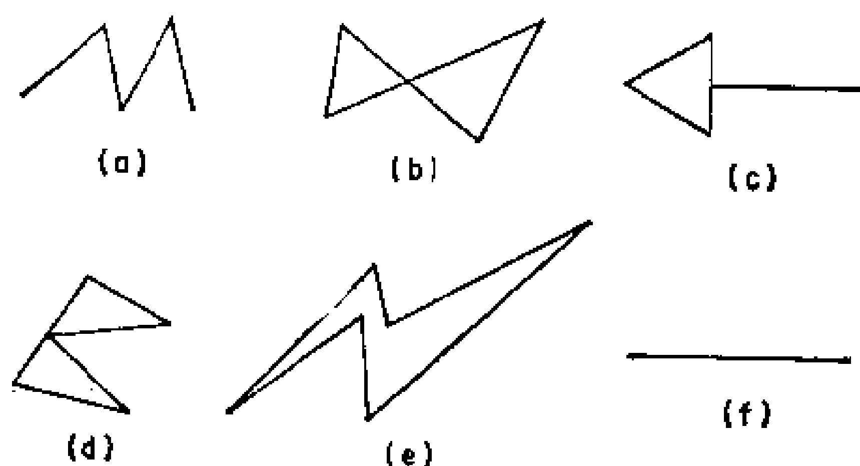


图 2.3

中之一的同一集合.)

(*b*) 对定理 2.1 里的集合 A 与 B, 试证: 必有至少一点在 A 中并且至少一点在 B 中.

3. 定理 2.1 的命题与证明是拓扑的吗? 为何是或为何不是? 讨论之.

4. 在尝试扩展定理 2.1 的证明到任意的单纯封闭曲线时, 会遇到什么困难?

5. (*a*) 定义一个单纯多边形的内部与外部.

   (*b*) 是否一个单纯多边形的内部必为单连通? 其外部又如何?

6. 在定理 2.1 的证明里, 点的区分于集合 A 与 B 之间乃是建立在计数某些交点上. 试想出另一特性, 它可用来将不在 S 上的平面上的所有点划分在两个集合里, 并且这两个集合具有我们所需要求的特性.

陆

集　合

6-1　引言

到目前为止，我们已经在本书几个地方考虑了事物的集合——或则是某一表面上的所有的点，或则是某一网络里的所有的路径。今后，我们将更多地涉及到事物的集合。因此，不仅需要对集合的构成有一种直觉的概念，而且也需要熟悉一些与集合有关的符号和术语。在十九世纪的末期，提出了一些与集合论的基础有联系的很重要问题。即使在今天，并不是所有这些问题都已经被解答得使每个人都满意。至少大家都同意集合的构成必须有某种限制或者用某种有序的程序来处理。通常，在展开对集合论的逻辑性的讨论中，集合的组成份子被认为是一个没被定义的概念。集合的组成份子必须满足某些公理，其它的概念都是以集合的组成份子的形式来加以定义的。

在这本介绍性的课本里，除了在某些问题里要一些简单引证外，我们打算不理会对集合构造的那些限制。在展开对集合论的讨论时，我们宁可用直观的方法而不用演绎的方法。对于那些感兴趣的学生，在参考文献里给出了一些对集合论进行更严格讨论的文献[例如参考 Halmos: Naive Set Theory]。

6-2　关于集合的一些相互关系

每个人都熟悉集合。图书馆就是一些书的集合；一个委员会是一些人的集合；一年是一些日子的集合；银河系是一些太阳系的

集合．我们将把集合、类、族和集团当做同义词使用，并且认为一集合是由一些可鉴定、可区别的对象所组成．这就是说，给定任一对象，我们必定能够鉴定或认出它，并且由这种认识就可以判定这一对象是这一集合的元素或不是它的元素．并且，若两个事物在某一集合中表现为两个不同的元素，则这两个对象一定是可以互相区别的；不允许完全相同的几个对象表现为某一集合里不同的元素．简言之，一个集合中的元素是不允许重复的．

例如我们来考虑由所有小于或等于 10 的正整数所组成的集合．在断言它是一集合时，要满足下列条件：

(1) 给定任一个对象，一定可以判定它是或者不是一个小于或等于 10 的正整数．

(2) 给定一对象 a，它是一个小于或等于 10 的正整数，以及一事物 b，它是一个小于或等于 10的正整数，则必可判定 a 与 b 不相同，或者它们实际上是同一的．

初看起来，上述的(1)和(2)所要求的两个判定似乎当然总是可以做到的．但是对这两个判定的忽视却是产生一些毫无结果的争论的根源．我们来看另一个例子．假设我们考虑由所有圆形对象构成的集合，而有人提出地球是我们所考虑的对象之一．那么，地球是不是这一集合的一个元素呢？通常说地球是圆的，但是每个人都知道地球上有山脉、丘陵和峡谷，因此地球是不是此集合的元素就取决于我们所赋予"圆"这个字的确切意义．再举一个例子；假设你借给了你的朋友一角钱硬币，他答应还你．第二天，他给了你十个一分钱硬币．那么他还完债了吗？你的朋友给你的十个一分钱硬币和你借给他的一个一角钱硬币是同一对象吗？这里，我们又看到，为了理解一个命题，必须清楚地理解命题中所包含的术语的意义．

通常我们用大写的罗马字母表示集合，用小写的罗马字母表

示集合的元素．若对象 a 是集合 A 的一个元素，我们写成：

$$a \in A.$$

若对象 a 不是集合 A 的一个元素，我们写成：

$$a \notin A.$$

通常用两种记法系统来表示集合．其中第一种记法对于只包含几个元素的集合最为方便．在这种情况下，可以把所有元素在一对大括弧间列出来．例如，$\{0, 1\}$即一个恰有两个元素——正数0与1——的集合．这种列出集合中所有元素的方法，使人易于判定出任一对象是否为此集合的元素．因为只要把这个对象与此集合所列出的每一个元素作个比较就行了．若此对象与列出来的元素之一完全相同，它就是此集合的一个元素，否则，它就不是此集合的元素．当然，还必须可以判定两个对象是否同一．考虑$\frac{2}{2}$这一对象．它是集合$\{0, 1\}$的一个元素吗？我们知道"$\frac{2}{2}$"与"1"乃是同一个对象的两个不同的名字．所以$\frac{2}{2} \in \{0, 1\}$．

如果一个集合有许多元素或无限多个元素，则要把这集合的元素完全列出来是既不可能也不实用的．在这种情况下，可能只需列出这一集合的几个元素，就可以期望读者从上下文或以前的经验正确地猜出其余的元素是什么．例如，集合$\{3, 4, 5, \cdots\cdots, 498\}$一定会被理解为恰有496个元素，它们包括从3到498的所有的整数．同样，$\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$乃是由所有正整数构成的集合．

用来表达集合的第二种记法，在于对集合做描述；即：它给出了一种检验规则，可以应用于任一对象，使得从检验的结果就可以判定此对象是否为此集合的一个元素．这种记法的形式是：$\{x: \cdots\}$．其中的三个点表示某一检验法则，而 x 必须通过这一检验法则的检验才能成为此集合的元素．例如，$\{x: 3 \leqslant x \leqslant 498\}$（它可以

读做：由所有如下对象 x 所组成的集合，其中 x 是介于或等于 3 与 498 的数)，它是由使得命题 $3\leqslant x\leqslant 498$ 成立的所有对象 x（且无他者）组成的．因此，这第二种记法的基本特点就是，它指出如何对任一对象判断出它是否为某集合的元素．与第一种记法一样，这第二种记法有时也要求读者由上下文或其它来源提供一些实际上并未写出的信息．例如，在一个关于整数的讨论中，集合

$$\{x:3\leqslant x\leqslant 498\}$$

必须理解为与集合

$$\{3, 4, 5, \cdots, 498\}$$

有着完全相同的元素．如果我们的讨论是针对实数的，则这两个集合必有不同的元素，例如：

$$\pi\in\{x:3\leqslant x\leqslant 498\}, \text{但是}\ \pi\notin\{3, 4, 5, \cdots, 498\}.$$

一集合若用第一种记法来表达，则称它为**被罗列**，若用第二种记法表达，则称它为**被描述**．

对集合的描述法的另一种看法是，把形式 $\{x:\cdots\}$ 里的三个点用“x 具有某种特性”这一命题来代替．这一集合就由所有确实具有这一特性的对象(且无他者)所组成．集合

$$\{x:\ x\ \text{是圆的}\}$$

就包含所有圆的对象．由此，任一特性，只要它使得每一对象或者有此特性或者没有这一特性，则都可以用来描述一个集合．反过来说，对任一集合，都存在一种特性可以用来描述它．显然，如果我们已知某一集合 A，那么“是 A 的元素”这一特性就表明这一集合所有元素的特性．即：

$$A=\{x:x\in A\}.$$

上面的这个等式引出一个问题，即：两集合相等这说法意味着什么．我们已经说过，一个集合就是由作为其元素的那些对象构成的．于是自然认为，两个集合相等，当且仅当它们含有相同的

元素时.

除了相等性之外,还有别的有关两集合之间的重要关系.如果一集合 A 的每一元素也是集合 B 的一元素,则我们称 A 为 B 的子集,或称 A 包含于 B;并且写为 $A\subset B$ 或等价地写为 $B\supset A$.(我们遵守下面的协定:用"包含在……之内"*意指"为……之一元素",而用"包含于"**意指"为……之子集合")***.像以往一样,$A\subset B$ 的否定式写为$A\not\subset B$.注意:每个集合 A 都是它本身的子集,因为集合 A 里的每个元素肯定是集合 A 的一个元素!如果$A\subset B$,且 $A\neq B$,我们称 A 为 B 的一个真子集.如果集合 A 与 B 用描述法给出如下:

$$A=\{x:S(x)\}$$

和

$$B=\{x:T(x)\},$$

很容易看出,$A=B$,当且仅当对于所有 x,命题 $S(x)$等价于命题 $T(x)$;再者,$A\subset B$,当且仅当对于所有 x,命题 $S(x)$隐含命题 $T(x)$.由此,对于集合之间的相等性与包含性的研究同时也是对语句函数(其值为句子的函数)之间的等价性与隐含性的研究.

有几个特殊的集合将使我们感到兴趣.往往为方便起见,我们考虑一种集合,它包含与已知的问题相关的那些必须顾及的所有的对象.这样的集合将经常地,但不是永远的,用 X 表示,称为这个问题的"万有集".如果对某一特定问题先选定了一个万有集 X,那么任何一个包含 X 的集合也可用来作为这个问题的万有集.当然,对某一问题进行两种不同的研究很可能会有完全不同的万有集.对万有集的选择可以想象为"对象"这个术语的一个定义.很清楚,这个定义只能用于对特定研究相关的工作中.在多数的情

---

*原文为"*is contained in*…."

**原文为"*is included in*…."

***我们将在译文中尽可能避免这种叙述以免混淆.——译者注

况下，一个可接受的万有集能从上下文中看出来，而在会引起混淆的地方，则须指明万有集.

第二个令人感兴趣的特殊集合与万有集极端不同．如上文已经指出的，若对于任一特性来说，每一对象要么具有它要么不具有它，则由此可以建立一个集合——即，由所有具有该特性的对象所组成的集合．但是若我们考虑"自身与自身不同"这一特性，则没有一个对象具有这一特性．因为每一对象均与自身同一．因此，由这一特性所描述的集合——即集合$\{x: x \neq x\}$——没有元素．由我们对集合的相等性的定义可知只有一个集合没有元素，这个集合就称为"空集合"*．我们将用ϕ专门表示这个集合．注意，ϕ是任何一个集合A的子集，因为ϕ的每个元素(它并没有元素!)一定也是A的元素.

恰仅有一个元素的集合在许多问题里起着重要的作用．这样的集合称为单元集．集合$\{a\}$——它仅有的元素为对象a——称为含a的单元集．对象a与含a的单元集不同，注意到这一点很重要．这就是说，我们把集合的构成过程看成是造一个新的对象，它不同于此过程所作用的那些对象．这对含有多于1个的元素的集合来说是很明显的——没有人会把集合$\{a, b\}$与单个对象a混淆；然而集合$\{a\}$与a有时却会发生混淆．考虑这样的情况：所考虑的对象本身就是一个集合；如由所有正整数组成的集合N．那么N有无限多个元素，而$\{N\}$仅有一个元素，当然它们不可能相同．对这一情况的考虑对于区别$\{a\}$与a之不同是很便利的，甚至也是必要的.

刚刚所讨论的例子表明集合本身就是对象，并且可以是其他集合的元素．所以，我们不能永远遵守前面曾讲过的一个约定，即

---

*原文 the empty set (null set, void set) 三者皆指空集合．——译者注

大写罗马字母表示集合而小写罗马字母表示集合的元素. 比如, 我们可能会考虑一个由人组成的集合, 它可能是集合

$$\mathscr{T}=\{x: x\text{ 为高于 6 英尺的人}\},$$

$\mathscr{T}$的每个元素都是一个人, 因而他可被认为是一个由分子组成的集合. 同样, 此集合中的每个分子都是一个由原子组成的集合. 由此我们看到集合的元素本身可能是一个更复杂的集合. 在这种现象令我们感兴趣的极稀有的情况下, 我们采用一种合适的记法如下:

$a, b, x,$ 等等: 考虑最简单类型的元素.

$A, B, S, X,$ 等等: 由如像 a, b, c, x 等等所组成的集合.

$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{S},$ 等等: 由如像集合 A, B 等等所组成的类(collection)*.

联系到上面所讲过的由高个儿的人组成的集合$\mathscr{T}$, C可以是一个特定的碳原子, 它与其他原子一起形成一个分子M. 由这样的分子所组成的一个类可能就是某个篮球队员 $\mathscr{B}$; 而一个由篮球队员适当地组成的集团就形成一个球队 $\mathscr{S}$.

例 2.1 令

$$A=\{1, 2, 3\},$$

并且

$$B=\{x: x\text{ 为一整数且 }1\leqslant x\leqslant 10\},$$

则 $A\subset B$ 并且 $A\neq B$. 因此 A 是一个 B 的真子集. 而且 $2\in A$, $2\not\subset B$, $\{2\}\notin A$, $\{2\}\subset A$. A 的一种描述方法可写成

$$A=\{x: x\in B\text{ 且 }-5<x<4\}.$$

例 2.2 令 $A=\{1, 2, 3\}$ 并且 $B=\{x: x\subset A\}$. 则

$A\in B$, 但 $A\not\subset B$;

---

*在一般数学书里, 经常用 collection 表示由集合组成的集合, 此时, 我们称之为类——译者注.

$1\in A$, 但 $1\notin B$;

$\{1\}\notin A$, 但 $\{1\}\subset A$ 并且 $\{1\}\in B$.

集合 B 含有 8 个元素;将 B 罗列而写为:

$$B=\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}.$$

例 2.3 集合 $A=\{1,1,2,2,2\}$ 恰仅有两个元素: 1 和 2.

习题

1. 令 $A=\{1,2,5,9\}$
   (a) 找出一个对象,它是 A 的元素.
   (b) 找出一个对象,它不是 A 的元素.
   (c) 找出一个对象,它是 A 的子集.
   (d) 找出一个对象,它不是 A 的子集.
   (e) 存在一个既是 A 的元素又是 A 的子集的对象吗?
2. 令 $A=\{x: x$ 为圆的$\}$ 并且 $B=\{x: x$ 为红的$\}$
   (a) 举例说明你怎样判定一个对象是否为 A 的一个元素.
   (b) 找出一对象 x, 使得 $x\in A$ 并且 $x\in B$.
   (c) 找出一对象 y, 使得 $y\in A$ 并且 $y\notin B$.
   (d) 找出一对象 z, 使得 $z\notin A$ 并且 $z\notin B$.
   (e) 找出一对象 C, 使得 $C\subset A$ 并且 $C\subset B$.
3. 下列集合都是用罗列法表示的. 试用描述法表示下列每一集合.对同一集合你能想出不同的描述法来表示吗? 哪一种记法显得更自然更方便?
   (a) $\{2,3,5,7,11,13\}$.
   (b) $\{2,3,5,7,\cdots\}$.
   (c) $\{1,4,9,16\}$.
   (d) $\{1,4,9,\cdots,625\}$.
   (e) $\{a,b,c\}$.
   (f) $\{a,b,\cdots,z\}$.
   (g) {约翰 · 詹斯,玛丽 · 史密斯}.
   (h) {在干线路和第 1 街交叉口的拐角处的加油站, 在干线路和第 2 街

交叉口的拐角处的加油站}.

(i) {第二章中的图 3.1, 第二章中的图 3.3, 第五章中的图 2.2}.

(j) {本书第 24 页第 22 行第 4 个字, 本书第 36 页第 4 行的第 3 个字}.

4. 下列的集合都是用描述法表达的. 试用罗列法表达下列每一集合. 对同一集合, 你能想出不同的罗列法表达吗? 哪一种记法看起来比较自然, 比较方便?

(a) $\{x: x$ 为整数且 $x<5\}$.

(b) $\{x: x$ 为整数且 $x>5\}$.

(c) $\{x: x$ 为整数且 $4<x<5\}$.

(d) $\{x: x$ 为偶整数$\}$.

(e) $\{x: x$ 为偶整数且 x 为质数$\}$.

(f) $\{x: x$ 为一英文单词且以 zy 开始$\}$.

(g) $\{x: x$ 为一英文单词且以 s 开始$\}$.

(h) $\{x: x$ 为一英文单词且以 pt 结尾$\}$.

(i) $\{x: x$ 为本书所用的字$\}$.

(j) $\{x: x$ 为本书的出版者$\}$.

*5. 试证, 当且仅当 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 时 $A=B$; 这一结果是关于集合相等性的许多证明的基础.

6. 下列集合哪些是用罗列法表达的? 哪些是用描述法表达的? 讨论: 对每一集合, 都能判定任一对象是否为该集合的元素, 以此证明你对上一问题的回答. 写出你从上下文中, 先前的经验或其他来源得出的所有附加假设.

(a) {房子, 狗}.

(b) {你, 我}.

(c) $\{a, b, \cdots, Y, Z\}$.

(d) $\{a, b, \cdots, 7, 8\}$.

(e) $\{a, b, \cdots\}$.

(f) $\{x: x$ 为大的$\}$.

(g) $\{x: x$ 为 π 的小数表达式中的一个数字$\}$.

(h) $\{x: x$ 为 π 的小数表达式中介于第 1,000,000 位和第 2,000,000 位小数之间的一个数字$\}$.

(i) $\{x: x$ 为 π 的小数表达式中无限多次出现的数字$\}$.

(j) $\{x:x$ 为 Zybnatious$\}$.

7. 集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$有几个子集？有几个真子集？

8. 下列对象中，哪些对对象相互间用 $=$，$\in$，$\subset$或$\supset$四种关系中有一种或一种以上的联系？

$R=\{x:x$ 为一实数$\}$.

$E=\{x:x$ 为一偶整数$\}$.

$F=\{x:x$ 为一有理数$\}$.

$T=$数字 2.

$V=\{x:x\in E$ 且 $x\notin R\}$.

$S=\{2\}$.

$P=7-5$.

$\mathfrak{S}=\{x:x\subset F\}$.

$Q=\{x:x$ 是 E 中两元素的商$\}$.

$N=\{1,2,3,\cdots,n\}$.

9. 试解释为什么 ϕ 是每一集合的子集？是否 $\phi\subset\phi$？是否$\phi\in\phi$？

10. 假如你着手证明勾股定理，那么你选择什么作为万有集？

11. 如同我们所看到过的，一集合的元素可能为任何一个对象．尤其是这些元素自身也可能是集合．由此可以设想某一集合可能包含其自身作为它的元素．如果一集合含有其自身作为一元素，我们就称该集合为“超常态的”；如果它不含有其自身作为一元素，则称该集合为“常态的”．集合

$$\mathfrak{S}=\{x:x \text{ 为常态集合}\}$$

试证$\mathfrak{S}$既非常态的亦非超常态的．这就是罗素悖论的一种形式．它首先于 1908 年由英国数学家伯特纳德 A. W. 罗素(1872—) 提出的．它表明，如果要使集合能照我们直觉所希望的那样工作，就必须对集合的构成加以某些限制或规则，从而使它们不会变得“太大”．这种对集合的构成作适当的限制不在这本介绍性的课本里讨论．

6-3 关于集合的一些运算

前一节里我们已经看到两集合之间或对象与集合之间可能有的几种关系．本节中，我们将讨论用一些集合来构造另一些集合

的方法. 通常将两集合组合起来就可以产生出第三个集合. 这种方法或组合规则称为二元运算. 我们在其他地方已经熟悉了二元运算——例如, 数字的加或乘都是把两个数字组合成第三个数的方法. 事实上, 我们将要定义的两个集合运算, 有许多性质是与数的加法和乘法共同的. 我们也将对一元运算感兴趣, 即能够用一个集合形成另一个集合.

在定义这些运算之前, 先有集合的一个图解表示法会是很便利的. 这种表示之一是梵氏图, 其中(图 3.1)的万有集由一个矩形里面的所有的点构成的集合来表示; 而某一特定集合 A 的元素由此矩形内一单纯封闭曲线所包围的点来表示. 在这个图中, 点 a 表示一个对象, 它是 A 的元素: $a\in A$; 而由点 b 表示的对象不是 A 的元素: $b\notin A$.

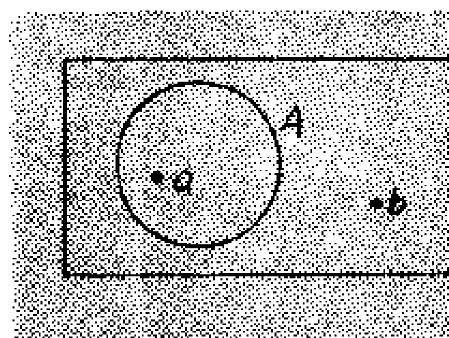


图 3.1

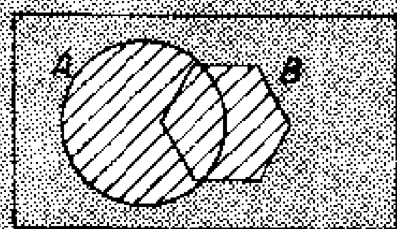


图 3.2

现在就能定义集合的运算了, 并且用梵氏图说明它们.

两集合 A 与 B 的并写成 $A\cup B$(图 3.2 中的阴影部分), 定义为集合

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

注意, "或"一字用在数学里是不互相排斥的意思. 这就是说, "命题 S 或命题 T"意指"命题 S 和 T 中至少有一个为真". 由此, $x\in A$ 或 $x\in B$ 这个条件意指对象 x 是集合 A 与 B 中至少一个的元素, 并且它可以同时是这两集合的元素. 当然, 一对象若同时是 A 与 B 的元素, 则它只能表现为 $A\cup B$ 中的一个元素. 因为同一个对象

不能重复表现为一集合的两个不同的元素.

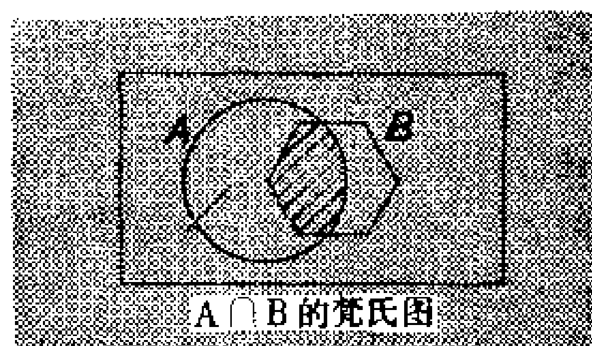


图 3.3

两集合 A 与 B 的交写成 $A\cap B$(图 3.3 中的阴影部分)定义为集合

$$A\cap B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

“交”运算可以用来定义集合间一种重要关系. 当且仅当 $A\cap B=\phi$ 时,即: 当且仅当没有任何对象同时既是 A 的元素又是 B 的元素时,集合 A 与 B 称为“不相连”(或其中某集合不相连于另一集合). 若两集合不是不相连的,则称为相交. 我们已经见过几个不相连的集合. 平面里一个单纯封闭曲线的内部与外部就是不相连的. 若把一地图里的面看成是从该表面上移走地图网络后所得到的那些小片,即:若面的边并不包括在面之内, 则地图的任意两个不同的面都不相连.

在第 8-3 节里我们需要比上述所定义的更一般些的并与交的运算. 如果 $\mathscr{A}$ 为任一由集合所构成的族,我们定义此族 $\mathscr{A}$ 的并为

$$\bigcup\{A:A\in\mathscr{A}\}=\{x:\text{存在某一 } A\in\mathscr{A},\text{ 具有 } x\in A\}$$

同样, 某一由集合构成的非空族 $\mathscr{A}$ 的交定义为

$$\bigcap\{A:A\in\mathscr{A}\}=\{x:\text{对每一 } A\in\mathscr{A},\ x\in A\}$$

在 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 的情况下,我们也写作:

$$\bigcup_i A_i \text{ 与 } \bigcap_i A_i$$

分别代替

$\bigcup\{A: A\in\mathscr{A}\}$ 与 $\bigcap\{A: A\in\mathscr{A}\}$.

从集合 A 减去集合 B 而得到的差集合写成 $A-B$(图 3.4 中的阴影部分),定义为集合

$A-B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$.

注意,减运算可以在任何两集合中进行.为了形成集合 $A-B$,它并不要求 B 必"小于"A.

一集合 A 的"余"集合写成 A'(图 3.5 中的阴影部分),定义为集合

$A'=\{x: x\notin A\}$.

注意,不管集合 A 如何选取,A 与 A' 两集合永远不相连.

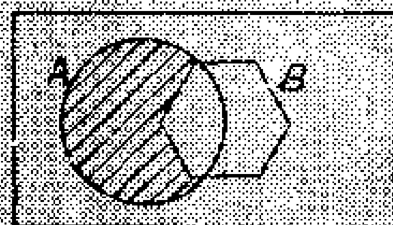


图 3.4

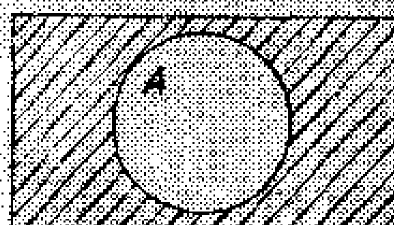


图 3.5

例 3.1 令万有集为 $X=\{1, 2, \cdots, 10\}$,而且集合 $A=\{2, 5, 7, 8\}$,$B=\{1, 5, 8, 10\}$,$C=\{3, 6, 9\}$. 则下述每一命题均很易于验证.

$A\cup B=\{1, 2, 5, 7, 8, 10\}$(注意,对象 5 和 8 既是 A 的元素也是 B 的元素,但各自只表示为 $A\cup B$ 的一个元素).

$A\cap B=\{5, 8\}$.

$A\cap C=\phi$ 因此 A 与 C 为不相连.

$A-B=\{2, 7\}$.

$A-C=\{2, 5, 7, 8\}=A$.

$A'\cup B'=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}=(A\cap B)'$.

$A'\cap B'=\{3,4,6,9\}=(A\cup B)'$.

$C\subset A'\cap B'$.

对于任意两个集合 A 与 B，其差集合 $A-B$ 能用其它的运算式子表示. 从图 3.4 可容易看出 $A-B=A\cap B'$. 并、交、余三种运算的最重要特性由定理 3.1 给出，其它的特性及减运算的特性都在习题里讨论.

定理 3.1 并、交、余三种运算满足下列条件. 这里，X 表示万有集；A, B, C 为 X 的任意子集；ϕ 为空集合.

交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A.$$

结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

幂等律

$$A\cup A=A.\qquad A\cap A=A.$$

分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

德莫尔根氏律 (DeMorgan's Law)

$$(A\cup B)'=A'\cap B',\qquad (A\cap B)'=A'\cup B'.$$

关于余集合的规则

$$(A')'=A,\qquad A\cap A'=\phi,\qquad A\cup A'=X.$$

ϕ 与 X 的特殊性质

$$A\cup\phi=A,\qquad A\cup X=X,\qquad \phi'=X.$$

$$A\cap\phi=\phi,\qquad A\cap X=A,\qquad X'=\phi.$$

注意：由于结合律，我们将去掉括号而写成 $A\cup B\cup C$，因为运算的结果与嵌入括号无关.

证明： 为了举例说明所用的证明方法，这里将证明分配律里

的第一个式子和笛莫尔根氏律的第一个式子．定理的其余部分的证明留作练习(习题3)．

证明 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$．从第6-2节中习题5可知这一等式等价于两个包含式：

$$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

与
$$A\cap(B\cup C)\supset(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

第一个包含式可由下文得证：假如 x 是 $A\cap(B\cup C)$ 的任意元素，则 $x\in A$ 并且 $x\in B\cup C$．这就是说，x 是 A 的元素并且 x 是 B 与 C 两集合中至少一个的元素．但这就意味着 x 为 A 和 B 的共同元素，或者 x 为 A 与 C 的共同元素；因此

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

第二个包含式可用第一个包含式证明步骤的反述来证明．若

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$．在这两情况中，均有 $x\in A$，并且 x 必为 B 与 C 两集合至少一个的元素；由此 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$．于是有：

$$x\in A\cap(B\cup C).$$

证明 $(A\cup B)'=A'\cap B'$．同样，把这等式用下述两个包含式来代替，它们就是即将要证明的．

$$(A\cup B)'\subset A'\cap B' \text{ 和 } (A\cup B)'\supset A'\cap B'$$

若 $x\in(A\cup B)'$，则 $x\notin A\cup B$．这意味着 x 不是 A 与 B 两集合中任何一个的元素．因此，$x\in A'$ 并且 $x\in B'$．由此得出 $x\in A'\cap B'$．另一个包含式可用这些步骤的反述来证明．

习题

1．定义 N、E、O、T、P 五集合如下：

$N=\{1,2,3,\cdots\}$（把 N 看成万有集），

$E=\{2,4,6,\cdots\}$，$O=\{1,3,5,\cdots\}$，

$T=\{3,6,9,\cdots\}$, $P=\{2,3,5,7,11,\cdots\}$, (P 是由所有质数构成的集合).

对下列每一集合找出一种简单的描述法表达, 并且罗列出一些元素来.

(a) $E\cup O$, (e) $T\cap(E\cup P)$,

(b) $E\cap O$, (f) $(T\cap E)\cup(T\cap P)$,

(c) $E\cup T'$, (g) $(P\cap O')\cup(P'\cap O)$,

(d) $(E\cup T)'$, (h) $\{[(E\cap O')\cup(E'\cap O)]'\cup P\}'$.

2. 用梵氏图表示出我们课文里所证明的分配律和笛莫尔根氏律 (定理 3.1).

3. (a) 试证第二种分配律, 并用梵氏图表示这个结果.

(b) 试证定理 3.1 中没有被证明的部分, 并且用梵氏图说明这些命题.

4. 证明下列命题都是等价的.

(a) $A\subset B$, (d) $A-B=\phi$,

(b) $A\cap B=A$, (e) $A'\supset B'$,

(c) $A\cup B=B$, (f) $A\cap B'=\phi$.

5. 试证下列每个条件都是 A 与 B 两集合不相连的充分必要条件.

(a) $A-B=A$, (c) $A\subset B'$,

(b) $B-A=B$, (d) $A'\cup B'=X$.

6. 一个集合与它的一个子集可能不相连吗? 一集合与其自身可以不相连吗?

7. 化简下列各式:

(a) $\{[A\cup B\cap(A\cup A')]\cup B'\}'$,

(b) $\{[(A'\cap B)'\cup(A'\cap A)]\cap B\}'$,

(c) $\{[(A\cup B')\cap A']\cup B'\}$,

(d) $\{[(A\cup B)'\cap A]'\cup B\}'$.

8. 试证对于任意集合 A, B, C 下列各式都是正确的. 用梵氏图说明这些结果.

(a) $(A-B)-C=A-(B-C)=(A-B)\cap(A-C)$,

(b) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap B\cap C)$,

(c) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$,

(d) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$,

(e) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-[(B\cap C)-A]$,

(f) $(A-B)'=A'\cup B$.

9. 对任意集合 A 和 B, 定义

$$A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B).$$

(*a*) 证明 $A\triangle=(A-B)\cup(B-A)$.

(*b*) 找出一集合 z，使得对每一集合 A 都有 $A\triangle Z=A$, 并且证明仅存在一个集合 Z 满足这一条件.

(*c*) 对每个集合 A, 求出一集合 A^* 使得 $A\triangle A^*=Z$, 并证明: 对每一集合 A, 集合 A^* 是唯一的.

(*d*) 证明 $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$.

(*e*) 试证当且仅当 $A\triangle B=A\cup B$ 时, A 与 B 不相连.

10. 将集合的并、交、减运算与数字的加、乘、减运算相对比较. 在什么运算过程中这两个运算集合相似? 在什么运算过程中它们不同?

11. 令 B 为一任意给定集合, 并定义

$$\mathscr{A}=\{A:A\subset B\}.$$

(*a*) $\bigcup\{A:A\in\mathscr{A}\}$ 是什么?

(*b*) $\bigcap\{A:A\in\mathscr{A}\}$ 是什么?

12. 在第 6-2 节中我们提到过, 对集合间的相等性与包含性两种关系的研究, 可视为语句函数间的等价性与隐含性的研究. 什么样的语句函数对应于集合的运算 $\cup$, $\cap$, $-$, 和 $'$? [提示: 假设 $A=\{x:S(x)\}$ 与 $B=\{x:T(x)\}$, 求出 $A\cup B$ 与 $A\cap B$ 等等的描述法表达.]

13. 化简下列各式:

(*a*) $[A'\cap(B\cup C)]'$,

(*b*) $[(A\cup B)\cup C']'$,

(*c*) $[(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(A\cup C)]'$,

(*d*) $A-[B-(C\cup D)]$,

(*e*) $A-[B-(C-D)]$,

(*f*) $A-[B-(C\cap D)]$,

(*g*) $A\cap[(A\cup B)-B]$,

(*h*) $(A-B)\cap[(A\cap B)\cup(A-C)]$,

(*i*) $(A\cap C')\cup(A\cap B\cap C)\cup(A\cap C)$,

(*j*) $(A\cap B\cap C)\cup A'\cup B'\cup C'$,

(*k*) $[A\cup(A\cap B)\cup(A\cap B\cap C)]\cap[A\cup B\cup C]$,

(*l*) $[(P\cap Q)\cup(P'\cap Q')\cup(P\cap Q')]'\cap[(P'\cup Q')\cap(P\cup Q')]'$,

(*m*) $[(P\cap Q)\cup(A\cap B\cap C)]\cap[(P\cap Q)\cup A'\cup B'\cup C']$.

柒

变　　换

7-1　引言

在第一章里，我们用弹性运动的概念给出一个暂时的拓扑定义．在第三章里，我们曾提醒读者，要对弹性运动有真正的理解就需要一些集合论的知识，这我们已在第六章里得到了．本章我们将能把已经掌握的有关此概念(弹性运动的概念)的那些知识解释得更清楚．不巧的是，“弹性运动”掺杂一些我们不想要的直观上的副产品．在这些令人讨厌的副产品里，主要是这样的概念：从一处到另一处的“运动”必需遵循某种路径或道路．在第 7-2 节里，我们将定义变换——这就是我们一直使用的所谓“运动”的意思；很清楚，变换是不需要路径或道路的．第 7-2 节里所讨论的内容对任意集合均适用．在第 7-3 节里我们将集中讨论一般三维欧氏空间里的子集．对于这些集合，我们将定义同胚或拓扑变换，并指出，这个新概念恰恰是我们一直设法用直观的弹性运动的概念引出的．在第 7-4 和 7-5 两节里讨论变换的两种标．这两种标被用来证明 Brouwer 的不动点定理及代数的基本定理．

7-2　两任意集合之间的变换

令 X 与 Y 为任意两个集合．所谓一个从 X 到 Y 内的变换是指一种对应：对于每个元素 $x\in X$，此对应恰决定着一个元素 $y\in Y$．就是说，必定有某个规则或程序，使得每当一特定元素 $x_0\in X$ 被选定时，这个规则就决定着一个元素 $y_0\in Y$．我们说，如此决定的元素 y_0

在这个变换下对应着 x_0（或称 y_0 为x_0 的象；或称 x_0 被送至 y_0 等等）.

值得注意的是，有些条件在变换的定义中并没要求．例如，如果 x_1 和 x_2 是两个不同的X的元素，则它们在Y中的对应元素 y_1 和 y_2 可能是不同的，也可能是相同的元素．定义里对这一点并没有要求．又如，对某些元素 $y\in Y$，可能在X中不存在任何元素与它们对应．定义所要求的只是对每一 $x\in X$，恰有一对应元素 $y\in Y$．我们用符号 f 或 f：$X\to Y$（其他字母可用来代替 f）表示从X到Y内的一种变换；并且对每一 $x\in X$，我们用 $f(x)$表示在此变换下为 x 的像的那个Y的元素．如果每一个 $y\in Y$ 都至少是一个元素 $x\in X$ 的像，则称此变换为从X到Y上．

定义某一变换的一种方法是给出一种规则，它可以被用来决定任意元素 $x\in X$ 的象；也就是说，给出一种对每一元素 $x\in X$ 决定一元素 $f(x)\in Y$ 的程序，下列的例子就是用这种方法来定义变换的．这些例子的续在本节稍后部分给出．

例 2.1　X 与Y 都是由所有实数组成的集合；$f(x)=2x$．变换 f:$X\to Y$ 是到Y上的．

例 2.2　X与 Y 都是由所有实数组成的集合；$g(x)=x^2$．变换 g: $X\to Y$ 是到Y内的，但不是到Y上的．

例 2.3　X 为所有实数组成的集合；$Y=\{0,1\}$．

$$h(x)=\begin{cases}0 & 若\ x\ 为有理数\\ 1 & 若\ x\ 为无理数\end{cases}$$

变换 h:$X\to Y$ 是到Y上的．

例 2.4　X 为任一集合，且 $Y=X$；$i(x)=x$．变换 i:$X\to X$ 称为X上的恒等变换，它是到X上的．

从变换定义和上述的例子可以清楚地看到，变换并不产生物理运动或移动．元素 $x\in X$ 并不是"运动"到元素 $f(x)\in Y$；而只是

使 x 对应于 $f(x)$. 元素 x 与 $f(x)$ 可以想像成被某种方式联系着，这种特殊的联系方式是用变换 f 来描述的. 但是这种联系方式通常不能看作一种物理运动.

由变换 $f: X\to Y$ 所给定的对应是从一元素 $x\in X$ 到一元素 $y=f(x)\in Y$. 可以考虑把给定的对应倒过来而得到的那个对应，这通常也是方便的. 对每一元素 $y\in Y$，我们定义在 f 下的 y 的**逆象**为这样的集合，它由所有对应于 y 的 X 的元素所构成，写成 $f^{-1}(y)$. 即:

$$f^{-1}(y)=\{x: x\in X \quad 且\ f(x)=y\}.$$

对任一子集 $B\subset Y$，B 在 f 之下的逆象写成 $f^{-1}(B)$，B 这个集是由所有其象在 B 内的 X 的元素所构成的；即:

$$f^{-1}(B)=\{x: x\in X\ 且\ f(x)\in B\}.$$

同样，对任一集合 $A\subset X$，我们定义

$$f(A)=\{y: y\ 对应着某个元素\ x\in A\}.$$

对某些元素 $y\in Y$，可能 $f^{-1}(y)$ 是空集合或者是一个具有相当多元素的集合. 如果对每一元素 $y\in Y$，集合 $f^{-1}(y)$ 为一单元集(即，若每一 $y\in Y$ 恰仅对应着一元素 $x\in X$)，我们称此变换为"一对一"并写成 $f^{-1}(y)=x$ 以代替 $f^{-1}(y)=\{x\}$. 在这种情况下，$f^{-1}: Y\to X$ 这个对应乃是一个变换，称为变换 $f: x\to Y$ 的"逆". 注意，对每个变换 $f: X\to Y$，已经定义了从 Y 的子集到 X 的子集的一个对应 f^{-1}，但为了使此对应能被称为 f 的逆变换，则必须要求 f 为一对一的.

存在几个与一对一变换有关的重要而有趣的结果. 如果存在一个从 X 到 Y 上的一对一变换，则自然称集合 X 和 Y 具有同样个数的元素. 然而，若 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 为由所有正整数构成的集合，且 $E=\{2, 4, 6, \cdots\}$ 为所有正偶数构成的集合，则对每个 $n\in N$，由 $f(n)=2n$ 给定的变换是一个由 N 到其真子集 E 上的一对一变

换．一个N的真子集可以与N具有同样多个元素，这好象是自相矛盾．但在另一方面，如果集合N与集合E处于一对一的对应状态中，则其中一集合肯定不可能比另一集合有更多的元素．

已经发现，以一对一变换的存在性为基础的“同样多元素个数”这一概念是富于成果的．正式的定义是：当且仅当存在一个从A到B上的一对一变换时，两集合A与B具有同样的“基数”．根据这一定义，命题“全体大于其自身的任一部分”——它习惯上是做为欧几里德的一个公设或“普通观念”给出的——实际上是不正确的．其他更进一步的结果在习题中引出．

例 2.1(续)　变换$f:X\to Y$的逆是由$f^{-1}(y)=\frac{1}{2}y$给出的变换$f^{-1}:X\to Y$．

例 2.2(续)　变换$g:X\to Y$没有逆变换，因为$g^{-1}(-2)=\varnothing$；又$g^{-1}(1)=\{1,-1\}$不是一个单元集．

例 2.3 (续)　变换$h:X\to Y$没有逆变换，因为$h^{-1}(0)$是一个含有无限多个元素的集合．

例 2.4(续)　变换$i:X\to Y$是其自身的逆．

习题

1．讨论下列情况，哪些情况中f：$X\to Y$是一变换？哪些情况中f是到Y上的？哪些情况中它是一对一的？哪些变换有逆变换？

(a)　X与Y都是由所有实数组成的集合．

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 若\ x<0,\\ 2, & 若\ x=0,\\ x^2, & 若\ x>0.\end{cases}$$

(b)　X为由美国所有居民组成的集合，Y为50个州所组成的集合，$f(x)$为x所居住的那个州．

(c)　令$f(x)$为x的面积(你用什么集合作为X与Y？)

(*d*) X 与 Y 都是由所有实数组成的集合。

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若 x 为无理数,\\ \dfrac{1}{q}, & 若 x 为有理数,并且等于\dfrac{p}{q},其中 p 与 q 皆为整数.\end{cases}$$

(*e*) 定义 $f(x)$ 为 x 的一个孙子.（X 与 Y 各是什么样的集合?）

(*f*) X 为某一教室里的所有椅子的集合,该教室内正在上课;Y 为所有注册选修该课的学生的集合;$f(x)$ 为坐在 x 上的学生.（是否可用其他比 X 和 Y 更合适的集合讨论以上的情况?如果某个学生缺席或到黑板前背诵,则怎样?如果有一些访问者坐在教室里又怎样?）

2. 令 $A=\{x: -1\leqslant x\leqslant 1\}$ 且 $B=\{0, 1\}$. 用例 2.1 到 2.3 中的函数 f, g, h 试求:

(*a*) $f(A)$,　(*b*) $g(A)$,　(*c*) $h(A)$,　(*d*) $f(B)$,　(*e*) $g(B)$,　(*f*) $h(B)$,　(*g*) $f^{-1}(A)$,　(*h*) $g^{-1}(A)$,　(*i*) $f^{-1}(B)$,　(*j*) $g^{-1}(B)$,　(*k*) $h^{-1}(B)$.

3. 令 f: $X\to Y$ 为一变换,且令 A 与 B 为 X 的任意两个子集.

(*a*) 证明: $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(*b*) 证明: $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$. 并举例证明其中的包含符号并非总可以用等号来替代.

(*c*) 证明: $f^{-1}(f(A))\supset A$. 并举一例证明这里的包含符号不能恒被等号替代.

4. 令 f: $X\to Y$ 为一变换,并令 A 与 B 为 Y 的任意两个子集.

(*a*) 证明: $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$,

(*b*) 证明: $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$,

(*c*) 证明: $f^{-1}(A')=[f^{-1}(A)]'$,

(*d*) 证明: $f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$,

(*e*) 证明: $f(f^{-1}(A))\subset A$. 并举一例证明这里的包含符号不能恒被等号替代.

5. (*a*) 若 $X=\{1, 2, 3\}$ 且 $Y=\{1, 2\}$, 有多少不同的变换 f: $X\to Y$?

(*b*) 若 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 且 $Y=\{1, 2, \cdots, m\}$, 有多少不同的变换 f: $X\to Y$?

6. 令 f: $X \to Y$ 为例 2.1 的变换.

(a) 什么实数 x 使得 $f(x)=x$ 为真?

(b) 什么集合 A 使得 $f(A)=A$ 为真?

(c) 假设用例 2.2 的变换 $g: X \to Y$ 代替 f, 回答(a)与(b)两问题.

7. (a) 证明存在一个从集合 $N=\{1,2,3,\cdots\}$ 到集合 F(由所有正有理数组成的集合)上的一对一变换(一个正有理数乃两个整数之商).

(b) 证明不存在任何一个从集合 N 到集合 $I=\{x:0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 上的一对一变换. (提示: 把每个 $x \in I$ 表示为一个无限小数, 并且假设存在一个一对一变换 $f: N \to I$. 构造一个无限小数 d, 使得对每一 $n \in N$, d 的第 n 位小数不同于 $f(n)$ 的第 n 位小数. 证明 $d \in I$, 但 $d \notin f(N)$, 这是一个矛盾.)

8. 令 X, Y 与 Z 为任意三个集合.

(a) 证明 X 与 X 有同样的基数.

(b) 证明若 X 与 Y 有同样的基数, 则 Y 与 X 有同样的基数.

(c) 证明若 X 与 Y 有同样的基数, 并且 Y 与 Z 有同样的基数, 则 X 与 Z 有同样的基数.

7-3 两个三维欧氏空间的子集之间的变换

如果集合 X 与 Y 中存在某一"结构", 则变换 $f: X \to Y$ 会变得更有趣. 这就是说, 如果元素或元素的集合存在某些使我们感兴趣的性质的话. 我们于是可以问, 这些性质经过这个变换或它的逆是否乃保持着. 记住这一想法, 本节我们将集中讨论那样的变换, 其集合 X 与 Y 均为三维欧氏空间的子集, 由于它的几何意义, 我们将用"点"来称呼 X 与 Y 的"元素". 我们将赋予这些集合的"结构"来自两点间的距离这一概念. 对于三维空间的任意点 p 与 q, 我们把从 p 到 q 的距离写为 $d(p,q)$. 我们还记得这个距离满足下列条件:

对任意点 p, q, r:

(1) $d(p,q) \geqslant 0$, (因而, $d(p,q)$ 是一实数.)

(2) $d(p,q)=0$, 当且仅当 $p=q$.

(3) $d(p, q)=d(q, p)$.

(4) $d(p, q)+d(q, r)\geqslant d(p, r)$.

第一个条件说明对任意两点(或同一点取两次)存在一个从一点至另一点的距离，并且这个距离是一个非负实数. 条件2包含着两方面的信息. 它表明任一点到其自身的距离为零；并且也表明从任一点到另一不同的点的距离恒不为零. 条件3告诉我们从一点到另一点的距离恒与从第二点回到第一点的距离相同. 由于这个对称关系，我们可以说两点之间的距离以代替从一点到另一点的距离. 第四个条件称作三角不等式；其中的点 p、q 和 r 可想成是三角形的三个顶点（此三角形可能退化成为一线段）. 而且,用这种解释,这个条件表述一三角形任意两边长度之和至少与第三边等长.

这样，这四个条件中的每一个都表明着关于三维欧氏空间里的距离的一个很简单的事实. 此外，还很可能提出距离的许多其他性质,但是这四个条件在下一章里将占很重要的地位.

在第7-2节中,我们见过集合间的变换的几个例子,那些集合的元素为不同类型的对象. 为了熟悉三维空间的子集间的变换的这种特殊情况,下面给出几个这种类型的例子.

例 3.1 令集合 X 与 Y 均为实数集合，则 X 与 Y 可以表示为三维空间里的两条直线(或同一直线). 由此，任一变换 $f: X\rightarrow Y$，其中 X 与 Y 皆为实数集合，能够看成是三维空间的子集间的一个变换. 今后,只要方便,我们就把实数集合与三维空间里的任一特定直线等同起来,并且称一直线为 X 轴,当且仅当 X 为实数集合并且该直线是等同于 X 的. 对于 Y 轴也是一样.

例 3.2 令 X 与 Y 为三维空间里的同一平面,变换 $f: X\rightarrow Y$ 是由平面的任一物理运动(例如平移与旋转)给出的. 这个运动将平面的每一个点带到同一平面里的某一点. 此变换的对应的规则

是：对任一点$x\in X$，$f(x)$是x被这个运动带到此平面上的那一点。我们可以考虑下列情况，作为这种运动的一些特例。

(a) 平移：每一点$x\in X$可用笛卡尔坐标记为(x_1, x_2)；于是$f(x)$是坐标为(x_1+h, x_2+k)的点，其中h与k为两已知常数。

(b) 旋转：平面上每一点$x=(x_1, x_2)$的对应点是：

$$f(x)=(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta, x_1\sin\theta+x_2\cos\theta),$$

其中θ为已知常数。当然，平面里的点也可以不用直角坐标而用极坐标来表示。这一变换是点与点之间的一个对应，而这个对应可以用几种不同的方法来表述。

(c) 平面的伸张(或收缩)：对任一点$x=(x_1, x_2)\in X$，令$f(x)=(hx_1, kx_2)$。其中h与k为已知常数。在这个例子中，若$h=k$，当$h>1$时，则此平面恒被伸张；当$h<1$时，此平面向原点收缩；当$h=k=1$时，我们得到此平面上的恒等变换。注意，恒等变换乃是平移、旋转和伸张这三种类型中每一种类型的特例。如果$h\neq k$，则要画出这种物理运动稍难些，它是由作用于不同方向的两个不同的伸张(或收缩)构成的。

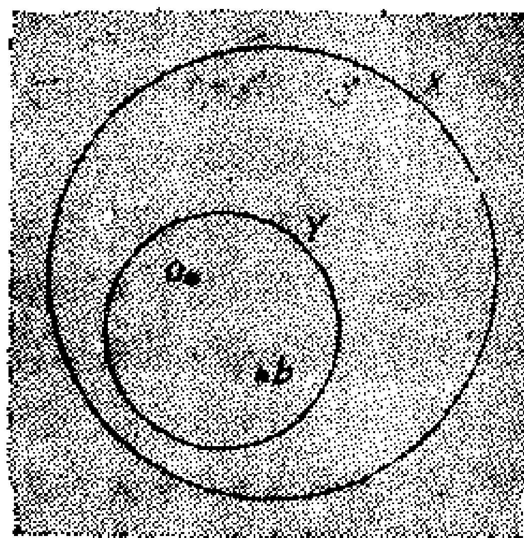


图 3.1

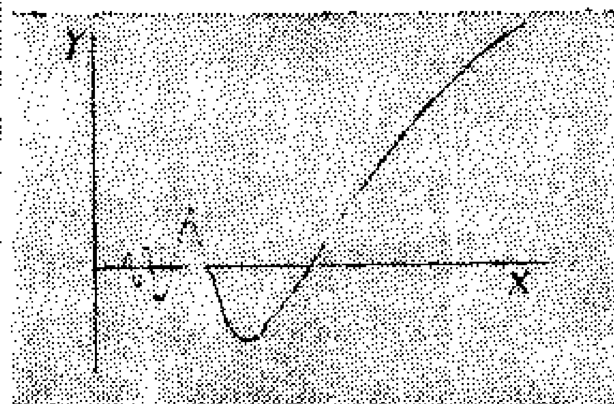


图 3.2

例 3.3 令X为一闭的球，并令Y为含在X内的一个闭的球

(图 3.1). 对每一 $x\in X$, 定义 $f(x)$ 为 Y 上最靠近 x 的点.

令 a 与 b 为 Y 上不同的两点, 则还有两种变换 g: $X\to Y$ 与 h: $X\to Y$ 可定义如下:

对每一 $x\in X$, 令 $g(x)=a$.

对每一 $x\in X$, 令

$$h(x)=\begin{cases}a, & \text{当 } x\in Y,\\ b, & \text{当 } x\notin Y.\end{cases}$$

例 3.4 X 为 X-轴, Y 为原点及方程 $y=x\sin(1/x)$ 的图(在一平面中, 参见图 3.2). 对每一点 $x\in X$, 令 $f(x)$ 为 Y 上的点 (x, y), 它的第一位坐标是实数 x. (注意, 我们已经把实数与 X-轴等同起来了.)

现在我们可以使用三维空间里的距离概念定义变换的连续性了. 变换 $f: X\to Y$ 在点 $x_0\in X$ 上连续, 当且仅当给定任一实数 $\varepsilon>0$, 存在一实数 $\delta>0$ 使得:

若 $x\in X$ 且 $d(x_0, x)<\delta$, 则 $d(f(x_0), f(x))<\varepsilon$. 一变换 $f: X\to Y$ 为连续的, 当且仅当它在每一 X 的点上均为连续.

连续性以及一些与它有关的概念(后面我们将遇到)在数学分析的全部内容里是基本而重要的. 因此, 每一个学数学的学生不仅必须知道连续变换的定义, 而且必须理解这个定义所说的是什么. 非常粗略地(而且不准确地)说, 变换 $f: X\to Y$ 于 x_0 处连续, 当且仅当, 每当一点 $x\in X$ 邻近于 x_0 时, 它的象 $f(x)$ 必邻近于 x_0 的象 $f(x_0)$. 这个命题形式里的"不准确性"在于没给出邻近的确切意义, 事实上, 可以看出在定义的叙述中使用了两个不同的"邻近性"的标准. 对任一正实数 r, 我们称三维空间的两点 p 与 q 为 r-邻近, 当且仅当 $d(p, q)<r$. 明显地, 在 x_0 处连续的定义里我们在集合 X 中使用了 δ-邻近性, 在集合 Y 中使用了 ε-邻近性. 使用这种叙述法, 定义说正实数 ε 可以任意选取. 并且, 当 ε 选定后, 必可

找出某一 $\delta>0$, 使得:

若 $x\in X$ 且 x 为 δ-邻近于 x_0, 则 $f(x)$ 为 ε-邻近于 $f(x_0)$.

由此, Y 里的邻近标准先被选定. 并且, 对每个这种选取, 必存在一个 X 里的邻近标准, 使得这两个邻近标准具有定义所要求的关系.

注意, 在上段的讨论中, x_0 从始至终表示一个点而且是同一的点. 这就是说, 这个讨论所关心的是与特定点 x_0 有关的某一性质. 当然, 这个性质就是 f 于 x_0 处的连续性. (由我们的定义可知, 讨论 f 于点 $z\notin X$ 的连续性是毫无意义的.) 对有关的性质, 即变换 f 的连续性, 要求 f 必须在每一 $x_0\in X$ 点上连续. 就是说, 每选取一定点 $x_0\in X$ 及一数 $\varepsilon>0$, 必存在某一 $\delta>0$ 满足上述条件. 注意, δ 的值可能取决于 x_0 与 ε 两者的值, 因为 x_0 与 ε 在 δ 求出之前, 就选定了.

例 3.5 令 $X=Y=\{x:x>0\}$, 并且令 $f(x)=1/x$, 则 $f:X\to Y$ 为一从 X 到 Y 上的一对一变换. 下面给出两种证明 f 为连续的方法, 第一种证明本质上是分析的, 而它的形式是这类证明经常使用的. 第二种证明较直观, 它指出第一种证明方法是怎样找到的.

第一种证明: 给定任一点 $x_0\in X$ 以及任一 $\varepsilon>0$, 选取

$$\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}.$$

现假设 $x\in X$ 为 δ-邻近于 x_0, 即: $d(x_0,x)<\delta$; 我们必须证明 $f(x)$ 为 ε-邻近于 $f(x_0)$. 我们求得

$$d(f(x_0),f(x))=\left|\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}\right|=\frac{|x-x_0|}{xx_0}=\frac{d(x_0x)}{x_0x}<\frac{\delta}{x_0x}.$$

但是, 由于

$$\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0},$$

而且 x 为 δ-邻近于 x_0.

$$x_0 x \geqslant x_0(x_0-\delta) = x_0\left(x_0 - \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}\right),$$

因而

$$d(f(x_0), f(x)) < \frac{\delta}{x_0 x} < \frac{\dfrac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}}{x_0\left(x_0 - \dfrac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}\right)}$$

$$= \frac{\varepsilon x_0^2}{x_0^2(1+\varepsilon x_0 - \varepsilon x_0)} = \varepsilon.$$

第二种证明： 图 3.3 表示，集合 X 与 Y 被表示为三维空间的两条直线的部分. 给定任一点 $x_0 \in X$ 及任一 $\varepsilon > 0$，首先安置好

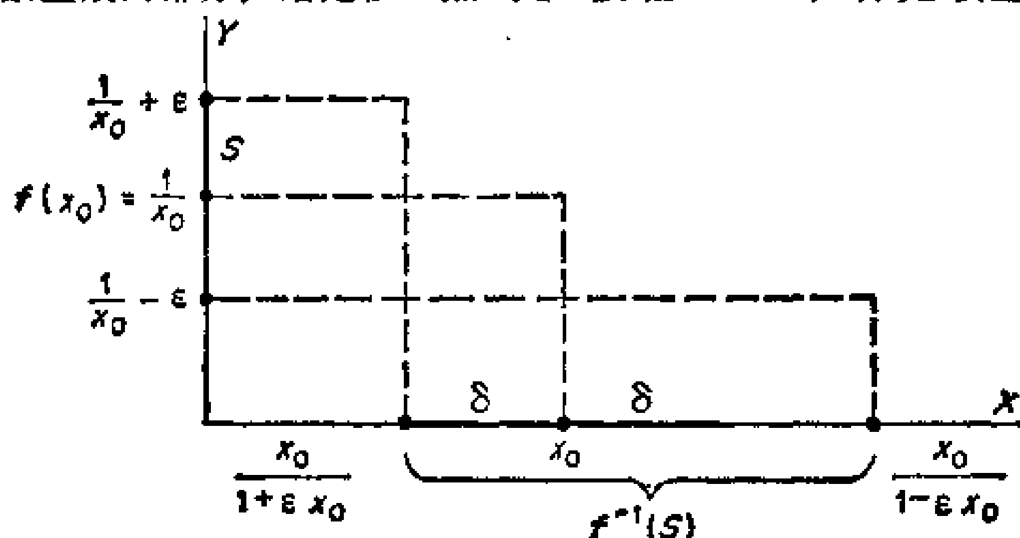


图 3.3

$f(x) = \dfrac{1}{x_0} \in Y$ 这一点，然后安置 Y 的子集，它包含 Y 中所有 ε-邻近于 $f(x_0)$ 的点. 这个子集即图 3.3 中粗的垂直线段 S. 其次，找出子集 $f^{-1}(S)$，它包含 X 中所有对应于 S 点的点. 集合 $f^{-1}(S)$ 是一线段，其中 x_0 位于此线段中点的左侧. 现在必须找出一个正数 δ，使得若 x 为 δ-邻近于 x_0，则 $x \in f^{-1}(S)$. 显然可取 δ 为从 x_0 到的线段 $f^{-1}(S)$ 的左端点(最靠近的)的距离. 这样，选取：

$$\delta = x_0 - \frac{1}{\dfrac{1}{x_0}+\varepsilon} = x_0 - \frac{x_0}{1+\varepsilon x_0} = \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}.$$

另外有一点必须说明．图 3.3 在某些情况下会引起误解．若 $\varepsilon x_0 \geqslant 1$，则图中所示 S 线段较低的那个端点不在 Y 里（因为它的坐标不是正的）．在所有情况下，集合 S 总是选取为 Y 的子集，它包含 ε-邻近于 $f(x_0)$ 的所有的 Y 的点．S 的较高的那个端点，而非那个较低的端点，被用来决定 δ．这样，图 3.3 中的那个较低的端点可能实际上不正确，但这种可能性并不影响 δ 的选取，而我们的结果在所有的情况里都是正确的．

例 3.6　令 X 与 Y 每个都是由所有实数组成的集合，并且定义

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant 0,\\ 1, & \text{当 } x>0,\end{cases}$$

则若 x_0 为 X 中除 0 以外的点，那么可以用与例 3.5 中相同的讨论证明 $f: X\to Y$ 于 x_0 处连续．让我们考虑选取 $x_0=0$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 这个特殊情况．那么不管 δ 选取怎样的正值，都有点 $x_1=\frac{1}{2}\delta$-邻近于 x_0．但是这点的象是 $f(x_1)=1$，而它不是 $\frac{1}{2}$-邻近于 $f(x_0)=0$．由此，$f: X\to Y$ 在 0 点处不连续．

例 3.7　令 X 与 Y 每个都是直线上所有坐标为正整数的点所构成的集合，即：

$$X=Y=\{1, 2, 3, \cdots\}.$$

令 $f(x)=2x$，以此定义变换 $f: X\to Y$．则 f 为 X 到 Y 内（但不是到 Y 上）的一个连续变换．实际上，对任一 $x_0\in X$ 以及任一 $\varepsilon>0$，我们可以选取 $\delta=\frac{1}{2}$．因为，如果 $x\in X$ 并且 x 是 $\frac{1}{2}$-邻近于 x_0，则 $x=x_0$，由此可得 $f(x)=f(x_0)$，所以 $f(x)$ 为 ε-邻近于 $f(x_0)$，不管正数 ε 是如何选取的．

现在，我们可以更深入地理解拓扑里所考虑的那类问题．一个**同胚映射**或**拓扑变换**是一个连续变换，它具有一个连续的逆变换．同胚映射的概念就是前面我们试图用“弹性运动”引出的概念．两个三维空间的子集 X 与 Y 为“同胚”或“拓扑等价”，当且仅当存在一个同胚映射 $f: X\to Y$．在例 3.2a，3.2b，3.2c（若 $h\neq 0$ 且 $k\neq 0$），3.4 以及 3.5 里的变换都是同胚映射．其他的例子和性质在习题里提出．拓扑学就是研究在同胚映射下不变的那些性质．

在一些重要的特殊情况下，存在一些把两个变换组合成第三个变换的方法．就是说，有一些关于变换的二元运算．这里，我们集中处理 $X=y$ 的情况，其中 X 与 Y 每个都是由所有实数组成的集合，并且，像往常一样，我们用一直线表示这两个集合．我们定义三种二元运算如下：

若 $f: X\to X$ 且 $g: X\to X$ 为两个变换，

$f+g: X\to X$ 定义为：$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$；

$fg: X\to X$ 定义为 $(fg)(x)=f(x)g(x)$；

$f\circ g: X\to X$ 定义为 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$．

这三种运算分别称为加、乘和合成．我们下面也考虑一变换乘以一实数 r．这个运算是由方程

$$(rf)(x)=rf(x)$$

定义之．例如，若 $f(x)=x^2$，并且 $g(x)=x^3$，则 $(f+g)(x)=x^2+x^3$，$(fg)(x)=x^5$，$(f\circ g)(x)=x^6$，$(7f)(x)=7x^2$．

定理 3.1 若 X 为所有实数的集合并且 $f: X\to X$ 和 $g: X\to X$ 都是连续变换，则 $f+g$，fg 和 $f\circ g$ 都是连续变换．而且对任一实数 r，变换 rf 也是连续的．

证明： 我们只给出函数 $f+g$ 的证明，其他情况的证明留作练习（习题 2）．若已知 $x_0\in X$ 且 $\varepsilon>0$，选取 $\delta_1>0$ 和 $\delta_2>0$ 使得

若 x 为 δ_1-邻近于 x_0，则 $f(x)$ 为 $\frac{\varepsilon}{2}$-邻近于 $f(x_0)$

并且

若 x 为 δ_2-邻近于 x_0，则 $f(x)$ 为 $\frac{\varepsilon}{2}$-邻近于 $g(x_0)$，

对 δ_1 与 δ_2 的选取是可能的，因为 f 与 g 为连续的．现在选取 δ 为 δ_1 与 δ_2 中较小的一个，可有：若 x 为 δ-邻近于 x_0，则 $f(x)$ 为 $\frac{\varepsilon}{2}$-邻近于 $f(x_0)$，且 $g(x)$ 也 $\frac{\varepsilon}{2}$-邻近于 $g(x_0)$．这就意味着：

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\text{并且}|g(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

但是因此

$$\begin{aligned}|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)|&=|f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)|\\ &\leqslant|f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

因为 $(f+g)(x)$ 为 ε-邻近于 $(f+g)(x_0)$，$f+g$ 于 x_0 处连续．因为 x_0 为一任意点，所以 $f+g$ 是连续的． ≪

对于任意实多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，我们可定义从实数到其自身的一个变换 $f:X\to X$ 如下，即令

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n.$$

由定理 3.1 可容易地得到这一结果，故这一变换是连续的．

习题

1. 讨论下列各个变换，讨论的问题是：在哪些点上变换为连续的？它存在一个逆变换吗？在哪些点上逆变换是连续的？变换是一同胚映射吗？
   (*a*) 例 3.3 所定义的变换 g: $X\to Y$.
   (*b*) 例 3.3 所定义的变换 h: $X\to Y$.（提示：考虑由于 a 与 b 在，或不在球 Y 的边界球面上所形成的不同情况.）
   (*c*) 例 3.3 所定义的变换 f: $X\to Y$.
   (*d*) 平面的平移(例 3.2*a*)

(e) 平面的旋转(例 3.2b).

(f) 平面的伸张(例 3.2c).

(g) 例 3.4 中定义的变换 $f: X\to Y$.

(h) X 与 Y 每个都是实数集合, 变换 $f: X\to Y$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}1/x, & \text{当 } x<0,\\ 2, & \text{当 } x=0,\\ x^2, & \text{当 } x>0.\end{cases}$$

(i) X 与 Y 每个都是实数集合, 变换 $f: X\to Y$ 定义为

$$f(x)\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 为无理数},\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ 1/q, & \text{当 } x \text{ 为非零有理数且其最简分数形}\\ & \text{式为 } p/q\,(q>0,\ p \text{ 与 } q \text{ 为整数}).\end{cases}$$

(j) 一个闭圆沿着一直径折叠. (你用什么集合作为 X 与 Y?)

(k) 一个闭球投影于一个切平面中. (X 与 Y 为何?)

(l) 一球面投影于一切平面中.

2. (a) 令 X 为三维空间的任一子集. 试证恒等变换 $i: X\to X$ 定义为对每一 $x\in X$, $i(x)=x$——为一同胚映射.

(b) 完成定理 3.1 的证明.

(c) 试证命题"任一多项式变换为连续的". 此命题恰出现在习题前面.

(d) 令 X 与 Y 每个都是实数集, 并且令 $f: X\to Y$ 为一变换. 学生们已经熟悉这种被称为"函数"的变换. 证明在这特殊情况下, 我们的连续性定义等价于通常在微积分课本里所见到的那种定义. 在其他一些特殊情况里我们将使用这一结果. (例如, 当 X 为单位区间, I: $\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$ 时.)

3. 若 $f: X\to Y$ 与 $g: Y\to Z$ 为同胚映射, 证明 $g\circ f$ 为从 X 到 Z 上的一个同胚映射.

4. 对三维空间里的每一点 x, 以及对每一正实数 r, 我们用 $B(x;r)$ 表示以 x 为圆心, 以 r 为半径的开球. 试证: 三维空间的子集间的变换 $f: X\to Y$ 在 $x_0\in X$ 处连续, 当且仅当对每一 $\varepsilon>0$, 存在一 $\delta>0$, 使得

$$X\cap B(x_0;\ \delta)\subset f^{-1}[Y\cap B(f(x_0);\ \varepsilon)].$$

*5. 令 X 与 Y 每个都是三维空间, 并如习题 4 里所定义的那样使用 $B(x;r)$. 证明: $f: X\to Y$ 连续, 当且仅当对每一 $y\in Y$ 和对每一实数 $r>0$,

若 $x\in f^{-1}(B(y;r))$，则存在一开球 $B(x;s)$，

使得 $B(x;s)\subset f^{-1}(B(y;r))$.

这个条件也可以叙述为：Y 里每个开球的逆象包含关于它的每一点的某一开球.

6. 令 f: $X\to Y$ 为三维空间的子集间的一个变换，并且令 $\varepsilon>0$ 为一正实数. 只要有

   如果 $x\in X$，并且 x 是 δ-邻近于 x_0，

   则 $f(x)$ 是 ε-邻近于 $f(x_0)$.

   我们就称正数 δ 为"在 x_0 处令人满意".

   (a) 证明 f: $X\to Y$ 在 x_0 处连续，当且仅当对每一 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，它在 x_0 处令人满意.

   (b) 证明 f: $X\to Y$ 为连续的，当且仅当对每一点 x_0 和每一 $\varepsilon>0$，存在一 $\delta>0$，它在 x_0 处令人满意.

   (c) 例 3.5 中，试证：对 $\varepsilon=1$，不存在任一 δ 的值，它在所有点 $x\in X$ 处令人满意.

7. 试做第 1—2节的习题 4.

8. (a) 试证：由图 3.4 中的两条直线及曲线所表示的三维空间里的两个子集为同胚.（任何表面都不包括在内——只包括直线和曲线.）

   (b) 在建立图 3.4 的两图形间的一个同胚映射时，图 3.4b 中的点 s, t, u, v, w, x, y, z 中的哪些点能对应于图 3.4a 中的点 a, b, c, d, e, f 中的每一点？（注意：在这两图形间存在许多不同的同胚映射；问题是要找出在点 s, t, …, z 里哪些点在这些同胚映射中的至少一个之下对应于点 a；对于点 b, c, d, e, f 亦如此.）

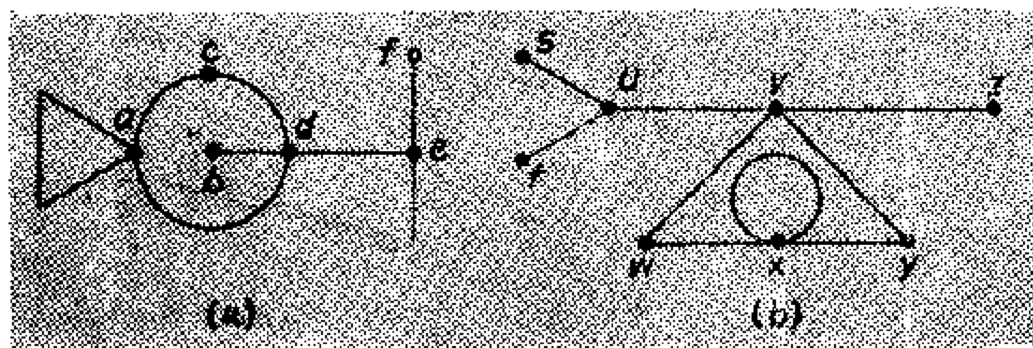


图 3.4

9. 令 X 为由所有实数的集合，并且令 f: $X\to X$, g: $X\to X$ 以及 h: $X\to X$

皆为变换(不一定要连续). 试证: $(fg)\circ h=(f\circ h)(g\circ h)$

10. 令

$$X=\{(x_1,\ x_2):\ 0\leqslant x_1\leqslant 1\ 且\ 0\leqslant x_2\leqslant 1\}$$

为平面里的单位正方形, 并且令

$$Y=\{y:0\leqslant y\leqslant 1\}$$

为其长度为 1 的线段. 把 x_1 与 x_2 的值写成小数形式, 并且若某一特殊值可写成两种可行的小数形式时, 选取那个具有重复的数字 9 的小数形式. 例如

$$\frac{1}{2}=0.5000\cdots=0.4999\cdots,$$

就选取 0.4999⋯ 为$\frac{1}{2}$的表示式. 定义 f: $X\to Y$ 如下: 对每一点 $x=(x_1, x_2)\in X$, 其中

$$x_1=0.\ \xi_1\xi_2\xi_3\cdots,\ 并且\ x_2=0.\ \eta_1\eta_2\eta_3\cdots,$$

令 $f(x)=0.\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2\xi_3\eta_3\cdots$. f: $X\to Y$ 为一变换吗? 它连续吗? 它是一对一的吗? 它是同胚映射吗? 你能用 f 找出一个集合, 它与单位正方形有同样的基数吗?

7-4 变换的标

本节里所有的 X 都是一个平面, 并且我们考虑变换 $f:X\to X$ (或者可能是 $f:X_1\to X$, 其中 $X_1\subset X$). 若某一点在变换下为其自身的象(即: 某一点 $x\in X$, 对于 x, $f(x)=x$), 则称之为 f 的不动点. X 的每一点都是恒等变换的不动点. 而一个平移(不是恒等变换)没有不动点.

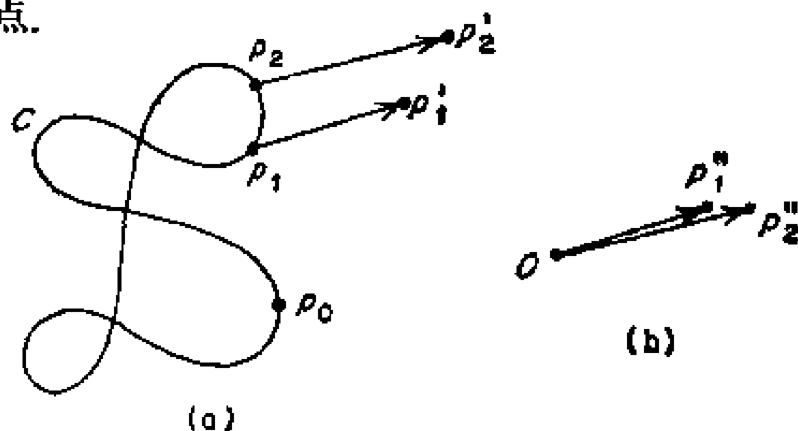


图 4.1

令 $f: X \to X$ 为一连续变换，并且令 C 为 X 里的一定向封闭曲线，它不包含任一 f 的不动点(图 4.1a)．也就是说，C 为一曲线，它从一点 p_0 开始，依给定的走向运行而终止于同一点 p_0．对每一点 $p \in C$，设 $f(p) = p'$，则 pp' 为一非零向量．选取任一合适的点 $O \in X$，并且画出平行且等长于 pp' 的向量 Op''．(图 4.1 表明对于两点 p_1 与 p_2 的这种构造．）现在设想点 p 循给定的走向沿着这一曲线运行，最后又回到它原来的位置．当 p 运行时，向量 Op'' 可能绕 O 点向任何方向旋转；但当 p 沿 C 运行完一圈而回到其原来位置时，向量 Op'' 也应回到它原来的位置，并且应绕 O 点完成整数个旋转．让我们将逆时针方向的旋转记为正，而将顺时针的旋转记为负，则存在一个唯一的整数 n(正，负或零）给出当点 p 沿曲线运行一周时，Op'' 绕 O 点的旋转的次数．称此整数 n 为 **f 沿 C**(在给定的走向上)**的标**．注意，若 C 包含某一 f 的不动点，则 f 沿 C 的标没有定义．

例 4.1 令 C 为一圆，定向如图 4.2a 所示，并令 f 为一变换，它定义为绕 C 的圆心逆时针旋转 90 度．图 4.2a 中画出几个 pp' 的向量．图 4.2b 中画出了一些对应的向量 Op''．f 沿 C 的标为 $+1$．

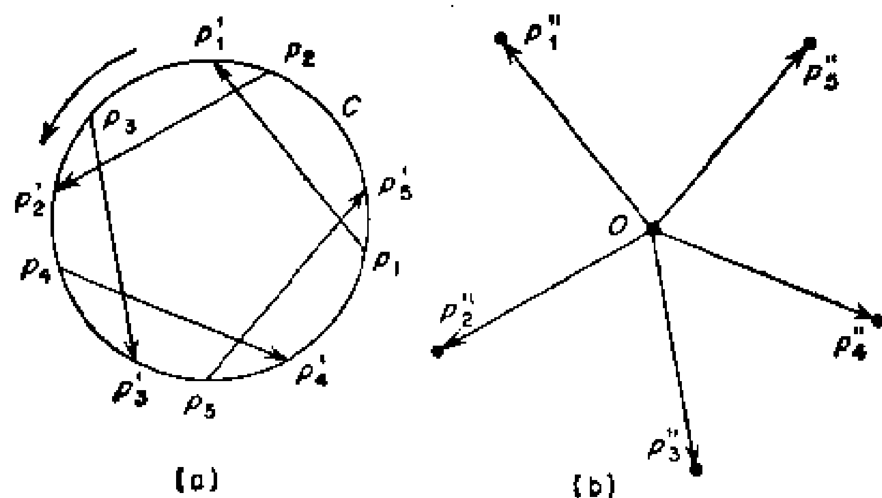


图 4.2

我们想要证明：一定向封闭曲线 C 的某些畸变并不影响变换沿 C 的标．这一事实的严格证明超出这本导论性课本的范围，但我们有办法使这一结论看起来是合理的．

定理 4.1 若 $f:X\to X$ 为一连续变换，并且若定向封闭曲线 C_0 能畸变为定向封闭曲线 C_1，而不历经任一 f 的不动点，则 f 沿 C_0 的标等于 f 沿 C_1 的标．

证明(似乎合理的)：当曲线 C_0 畸变成曲线 C_1 时，它历经无限多个位置(不同曲线)而不断变化．我们想像把这些曲线以实数 α 而参数化了，其中 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，使得对在这一范围内的每一 α，我们有曲线 C_α，并且这些曲线中的第一个和最后一个(C_0 和 C_1) 正是此定理的曲线．我们令 $n(\alpha)$ 等于 f 沿 C_α 的标，以此来定义函数 n．则函数 n 对 α 的所有值有定义，并且此函数的所有的值皆为整数，而 α 介于 0 与 1 之间并包括 0 与 1．现在，如果 α 只有很小的改变，设它变成 $\alpha+\delta$，则曲线 C_α 也很小地改变成曲线 $C_{\alpha+\delta}$(图4.3；图中只画出每一曲线的一部分)．C_α 上一任意点 p 运行到 $C_{\alpha+\delta}$ 上的一点 q．由于 $f:X\to X$ 为连续的，所以曲线的象也只有很小的改变．由此，对每个向量 pp'(它的旋转给出 f 沿 C 的标)，向量 qq' 几乎与 pp' 位于同样的方向，而这个 qq' 向量的旋转则给出 f 沿 $C_{\alpha+\delta}$ 的标．因为在每个点上 pp' 与 qq' 位于几乎相同的方向，这两向量旋转的总数必接近相同．但是，这种旋转的总数是一个整数圈数．由此，因为 n 只能很小地改变，并且恒为整数，所以它必须保持恒量；这正是我们所要的结论．≪

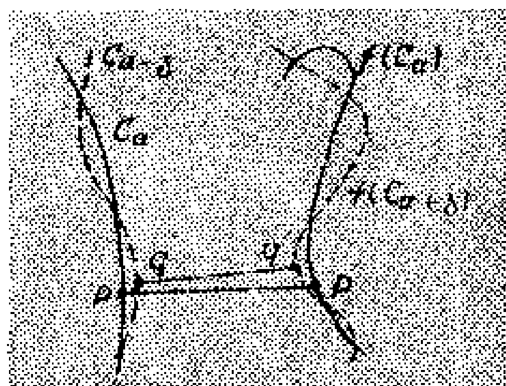


图 4.3

从定理 4.1 的证明可以清楚地看到，不必要把 f 定义于整个平面 X 上．而只要把它定义在平面之使得 C_0 畸变成 C_1 的那部分

上即可. 在第 7-5 节的应用中将出现这种情况。

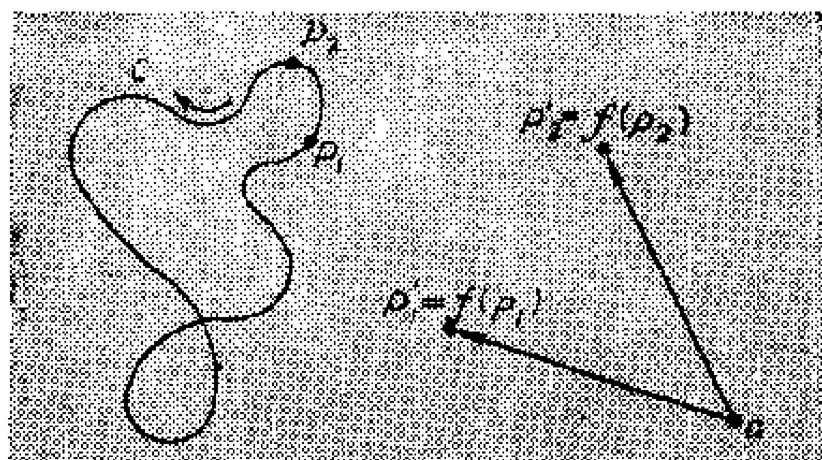


图 4.4

到此为止，我们一直在讨论的是变换沿着一条定向封闭曲线的标；我们还要讨论另一与它有关的概念. 令 $f:X\to X$ 为一连续变换；令 C 为 X 中的一定向封闭曲线(图 4.4)，且令点 $a\in X$ 为不含于 C 在 f 之下的象里的点；即：$a\notin f(C)$. 对每一点 $p\in C$，我们确定一从 a 到点 $p'=f(p)$ 的向量（图 4.4 给出两个点的这种结构）. 现在设想 p 点在给定的走向沿着曲线 C 运行而最后回到它的原来位置. 当 p 运行时，向量 ap' 可能绕着 a 以任何方向旋转，但当 p 点绕 C 走完一圈而回到它的原来位置时，向量 ap' 也将回到它的原来位置并且完成绕 a 的整数周旋转. 这一旋转的周数（逆时针时为正，顺时针时为负）就是 f 相对于曲线 C(循给定的走向)在点 a 上的标.

定理 4.2 令 $f:X\to X$ 为一连续变换，并且令 a 为 X 的一点. 如果定向封闭曲线 C_0 能被畸变成定向封闭曲线 C_1 而不历经 $f^{-1}(a)$ 中的任一点，则 f 相对于曲线 C_0 在点 a 上的标等于 f 相对于 C_1 在点 a 上的标.

证明：习题 5. ≪

本节中定义的这两种变换的标将在第 7-5 节里用来证明两个重要的结论。

习题

1. 对下列每个变换 f: $X\to X$, 求出 f 沿着圆(其圆心在原点且半径为 1)的标. 把这一圆定向为逆时针方向.

(a) 平移(例 3.2a).

(b) 旋转(例 3.2b).

(c) 伸张(例 3.2c).

(d) 令 O 为原点, 并对每个 $x\in X$, 定义 $f(x)=0$.

(e) 令 a 为点(10, 15)(在直角坐标里), 并且对每一 $x\in X$ 定义 $f(x)=a$.

(f) 两个变换, 它们把极坐标为(r,θ)的点送至极坐标为$(kr, \alpha\theta)$的点; $k=\frac{1}{2}$, α.

(g) 变换: 它把极坐标为(r, s)的点送至直角坐标为(r, s)的点. (提示: 要谨慎!)

2. 哪些点是习题 1 里的变换的不动点?

3. 令 f: $X\to X$ 为一连续变换, 并且令 C 为 X 中一个定向曲线(不必是封闭的), 它不包含任一 f 的不动点. 定义一定向封闭曲线 C' 如下: 沿着 C 走, 然后反方向地沿着 C 走. 求证 f 沿 C' 的标为 0.

*4. 令 f: $X\to X$ 为一连续变换, 且令 a 为 X 的一点使得 $f(a)\neq a$. 证明若 C 为 X 中以 a 为圆心且半径充分小的圆, 则 f 沿 C 的标为 0.

5. 证明定理 4.2.

6. (a) 求出一个旋转(变换)相对于单位圆(圆心在原点, 半径为 1; 定向为逆时针)在原点上的标.

(b) 求出一个旋转(变换)相对于单位圆在点(10, 15)(直角坐标)上的标.

(c) 求出习题 1(f) 的变换相对于单位圆在原点上的标.

(d) 求出习题 1(f) 的变换相对于单位圆在点(10, 15)(直角坐标)上的标.

*(e) 令 f: $X\to X$ 为一变换, 它把极坐标为(r,θ)的点送至极坐标为$(r^n, n\theta)$的点. 求出 f 相对于单位圆在原点上的标.

*7. 证明 f 相对于定向封闭曲线 C 在 a 上的标等于恒等变换相对于曲线

$f(C)$在a上的标.

8. 批评定理 4.1 的证明. 为什么它只是一个“近似合理的证明”? 证明中什么地方我们用过假设: 在畸变中, 曲线不历经任一f的不动点?

7-5 变换的标的应用

我们已经看到了(第 7-4 节习题 2)一个连续变换可以有也可以没有不动点. 在这一节里, 我们将用变换的标这一概念来证明一个卓越的定理. 它是由荷兰数学家 L. E. J. Brouwer(1881—)提出的. 这个定理阐明某些变换必定具有不动点. 此外, 我们还将证明代数的基本定理. 这两个定理的证明是建立在第 7-4 节里所定义的变换的两种不同的标的基础上.

定理 5.1 (Brouwer 的不动点定理) 若X为一封闭圆盘, 则每一连续变换$f:X\to X$具有不动点.

证明: 用反证法证明. 令C_0为X的圆周, 并令C_1为C_0的一个同心圆, 其半径r小于C_0的半径. 若f无不动点, 则C_0能畸变成为C_1而不历经任一f的不动点, 并且由定理4.1 可知f沿C_0和沿C_1的两个标必相同. 如果r为充分小, 则f沿C_1的标为0(第 7-4 节习题 4). 若能证明f沿C_0的标不是 0, 则此证明完成. 事实上, 在每一点$p\in C_0$, 从p到$p'=f(p)$的向量必须指向圆盘内(图5.1); 就是说, 向量pp'永远位于在p点上切于C的切线的同一侧. 显然当p绕C一圈时, 切于C的切线也正好绕了一圈. 因为向量pp'永远位于切线的同侧, 它必定也绕了一圈, 因而f沿C_0的标为$+1$或-1. ≪

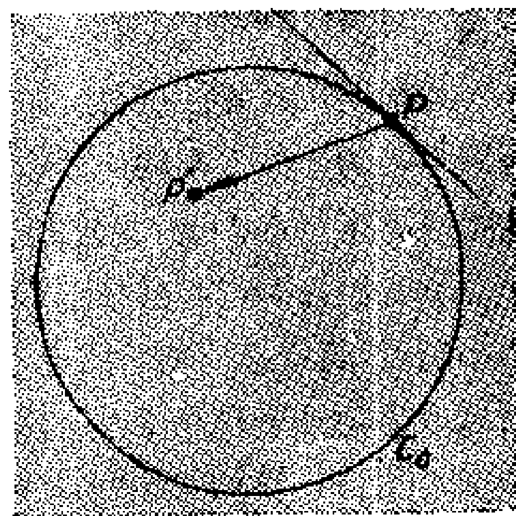


图 5.1

我们称三维空间的某一子集具有不动点性质，当且仅当每一从X到其自身内的连续变换都具有不动点. 那么 Brouwer 的不动点定理表述了一个封闭圆盘具有不动点性质. 很容易看出，一个移去圆心的封闭圆盘不具有这一性质(试以旋转变换)；而且球面也不具有这一不动点性质. 其它例子见于习题.

定理 5.1 的证明是建立在一变换沿某一曲线的标这个概念的基础上. 下述定理的证明将用到一变换相对于某一曲线在某一点上的标的概念.

定理 5.2 (代数的基本定理)每一多项式方程式，其系数为复数而且次数$n>0$，在复数中必定至少有一根.

证明：我们把任一复数$u+iv$看成是代表平面X上其直角坐标为(u, v)的点，并且，我们以通常的方法定义复数的绝对值如下：

$$|u+iv|=\sqrt{u^2+v^2}.$$

那么，若z_1与z_2为任意两复数，则从原点到z_1的距离为$|z_1|$，而且从点z_1到点z_2的距离为$|z_2-z_1|$.

因为可以用最高次项的系数通除多项式，我们可以假设

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$均为复数，我们必须证明方程式$f(z)=0$至少有一根.

此证明用反证法进行. 假设$f(z)=0$没有根，则$a_n\neq0$. 因为否则零必为$f(z)=0$的一个根. 现在，在连续变换$f: X\to X$之下，它把点z带至点$f(z)$，原点被带至a_n. 因为f为连续的，所有的充分靠近原点的点必被带至靠近a_n的点. 由此，一个圆心在原点的小圆C_0的象必为位于靠近a_n处的某一封闭曲线C(图 5.2). 进而可得f相对于C_0在原点的标为 0. 但是C_0可以扩大为任意大的圆C_1而不历经$f^{-1}(0)$的任一点($f^{-1}(0)$为空集合，因为$f(z)=0$没有根)；因此，由定理 4.2，f相对于C_1在原点的标为 0.

现在考虑变换 $f: X \to X$，定义它为 $g(z)=z^n$. 由第 7-4 节习题 6(e)，g 相对于单位圆在原点上的标为 n. 因为 $g^{-1}(0)=\{0\}$，所以可以把单位圆扩大成圆 C_1 而不历经 $g^{-1}(0)$ 的任一点；因此，由定理 4.2，g 相对于 C_1 在原点上的标为 n.

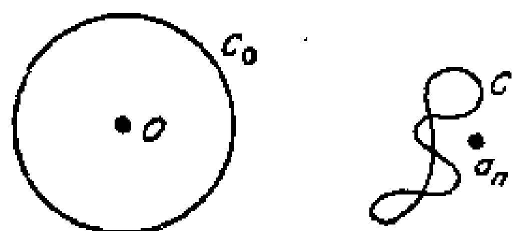


图 5.2

这一反证法证明将以证明 f 与 g 相对于 C_1 的两个标相同而结束. 由第 7-4 节习题 7 可知只须证明恒等变换 $i: X \to X$（$i(z)=z$，对每一 $z\in X$）相对于两曲线 $f(C_1)$ 与 $g(C_1)$ 在原点上的标相同就够了. 这一结论可由定理 4.2 得出，只要我们证明曲线 $f(C_1)$ 能畸变成为曲线 $g(C_1)$ 而不历经原点（$i^{-1}(0)=\{0\}$）. 下面就叙述这一畸变.

选取 C_1 的半径，使得

$$R>1，并且 R>|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

对任一点 $z\in C_1$，从 $f(z)$ 到 $g(z)$ 的距离为 $|f(z)-g(z)|$，并且我们可得

$$\begin{aligned}|f(z)-g(z)|&=|a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z+a_n|\\&\leqslant|a_1|R^{n-1}+|a_2|R^{n-2}+\cdots+|a_{n-1}|R+|a_n|\\&\leqslant R^{n-1}[|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|<R^n=|g(z)|.\end{aligned}$$

由此，对任一 $z\in C_1$，$f(z)$ 与 $g(z)$ 之间的距离必小于从 $g(z)$ 到原点的距离. 所以原点不能在从 $f(z)$ 到 $g(z)$ 的线段之上. 但这就意味着曲线 $f(C_1)$ 能沿着连接 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的线段而畸变成曲线 $g(C_1)$；而且，在这一畸变中，曲线从不经过原点. ≪

习题

1. 证明下列三维空间的子集中没有一个具有不动点性质，
   (a) 胎形，
   (b) 球面，
   (c) 开圆盘，
   (d) 闭圆盘移去其开圆盘里的某一点，
   (e) 闭圆盘移去其圆周上的某一点.
2. (a) 检验几个从闭圆盘到其自身内的连续函数的例子，并找出每个函数的一个不动点；它能有更多的不动点吗？它能有任意多个不动点吗？
   (b) 找出一个从球面到其本身上的同胚映射，它没有不动点；它恰仅有一个不动点；它恰有两个不动点.
3. 以下列为基础，给出 Brouwer 的不动点定理的另一可行的证明：令 $f: X\to X$ 为一从闭圆盘到其自身内的连续函数而不具有任何不动点．对每一点 $x\in X$ 画出从 $f(x)$ 到 x 的线段，并且延长此线段直至交于圆周上的点 x'．定义变换 $g: X\to X$ 为 $g(x)=x'$，则 g 为一连续变换，它变换闭圆盘到其圆周上，并且使得圆周上的每一点皆不动．但是可以直觉地看出并没有象 g 这样的变换.

*4. 证明：若 f 为球面 S 到其自身内的一个连续变换，则 f 具有不动点或者存在某一点，它被 f 送到它的对径点．(提示：假设 f 无不动点并且不存在任何一点被 f 送到它的对径点．对每一点 $p\in S$，在连接 p 与 $f(p)$ 的大圆上取朝着小弧方向而切于 p 点的切线，以此决定每一 $p\in S$ 上的唯一方向 d．现在考虑任一 S 上的有向圆 (图 5.3)．在每一点 $p\in C$ 上，令 θ 为介于向量 t (它在 p 点处切圆C)与上面决定的方向 d 之间的夹角．当 p 点绕 C 运行一周，则 θ 角的净改变量是 360 度的整数倍．称这个整数

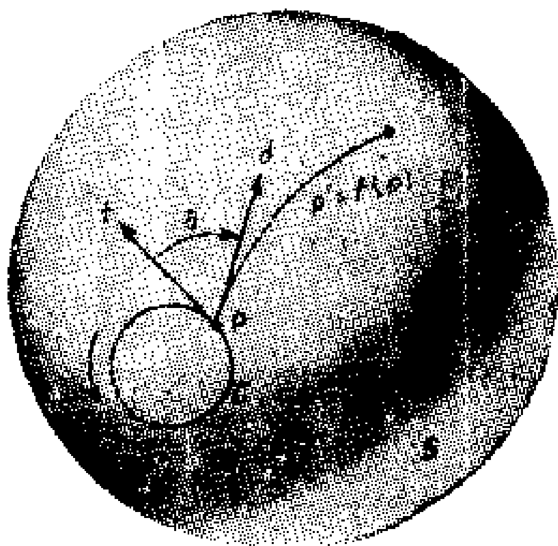


图 5.3

倍为C的标．用类似定理 4.1 的证明来证明畸变一个圆弧曲线并不改变它的标．从下列所述可得一矛盾：从一个很小的圆 C_0 开始，并且使它受到两种不同的畸变：(1)保持 C_0 的大小为恒量，在球面上滑动 C_0 至与其对径位置上得 C_1；(2)把 C_0 扩大成一大圆，并把它在另一半球上收缩为与 (1) 的畸变中最后所得的圆 C_1 相同．证明至少在此两种畸变的一种下，圆 C_0 的标必定改变．)

5. 证明：若一个弹子球的球面上长满毛发，则不可能把它梳得处处匀平．(提示：利用习题 4.)

6. 证明：若 f: $S\to S$ 和 $g:S\to S$ 为球面 S 到其自身内的两个连续变换，则变换 f,g 和 $f\circ g$ 中至少有一个具有不动点．[记住 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$](提示：若不然，则对每一点 $p\in S$, p, $p'=f(p)$ 与 $p''=g(p')$ 三点互异．这三点决定唯一的一个圆．利用这个圆来定义一个连续变换 $h:S\to S$，使得 h 无不动点，并且无任一点被送到与它的对径点上．这与习题 4 的结果矛盾．)

7. 作为习题 6 的结论的一个特例，证明若 $f:S\to S$ 为球面到其自身内的一连续变换，则要么 f 有不动点，要么存在 S 的两个不同的点 p 与 q，使得 $f(p)=q$，并且 $f(q)=p$.

8. 画图说明定理 5.2 在情况为 $f(z)=z^2+2z+2$ 时的证明.

9. 在定理 5.2 的证明中，我们说 f 与 g 两变换为连续的．请证明这一事实．(提示：定义平面里两点 z_1 与 z_2 的加与乘，并把定理 3.1 的证明一般化到 X 为平面的情况．)

捌

空　间

8-1　引言

在第七章里我们已经看到了在三维空间里两点间的距离的概念如何被用来定义变换的连续性；接着，这个概念又被用来定义图形的拓扑等价．但是，我们也曾讨论过一些图形(例如 klein 瓶)，它们并不是三维欧氏空间的子集．连续性与拓扑等价的定义可以推广，而使得它们对这些情况也适用．本章就阐述这种推广．

在第 8-2 节里，我们指出两点间的距离这一概念甚至在当“点”为任意集合(或许是函数的集合)的元素时也是可行的．在这种情况下，我们称这种集合为距离空间．连续性与拓扑等价的定义可以直接从第七章对它们的阐述转移到距离空间上．

在第 8-3 节里，我们将看到一些能够在距离空间里定义的概念(例如开集合，闭集合)在更一般化的情况下也是可行的．它们将被用来在更一般化的情况下定义连续性与拓扑等价性．

在第 8-4，8-5，8-6 节中将讨论三种特别重要的性质(连通性，紧致性和完备性)．其中前两个性质是拓扑性质而最后的一个则不是．

8-2　距离空间

在第 7-3 节中，我们曾经提到三维空间中距离函数的四个基本性质．这里，我们将看到，若 X 为任一集合，并且 d 为一具有这四种性质的函数，则我们的所感兴趣的(与三维空间有关的)许多

概念能够在这个集合 X 中定义.

令 X 为一集合，并且令 d 为对点对 $x\in X$，$y\in X$ 所定义的一实数值函数. 当且仅当对 X 的所有点 x，y 与 z，下列条件都被满足时，函数 d 为 X 的一“度量”.

(1) $d(x,y)\geqslant 0$,

(2) $d(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$,

(3) $d(x,y)=d(y,x)$,

(4) $d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z)$,

函数 d 在点 x,y 上的值[即：实数 $d(x,y)$] 称为从 x 到 y 的“距离”. 一个“距离空间”乃是一个集合 X 连同 X 中的一个度量 d.

在开始讨论距离空间之前，让我们先注意一些例子. 从例 2.1 到例 2.6 的每一个例子都是距离空间.

例 2.1 X 为三维欧氏空间的任一子集；$d(x, y)$ 为通常的从 x 到 y 的距离.

例 2.2 X 为一任意集合，函数 d 被定义为

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=y,\\ 1, & \text{当 } x\neq y.\end{cases}$$

例 2.3 X 为由平面上所有的点所组成的集合，对任意点 $x=(x_1,x_2)\in X$ 与 $y=(y_1,y_2)\in X$，令

$$d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|.$$

例 2.4 X 为定义在单位区间

$$I=\{t:0\leqslant t\leqslant 1\}$$

上的所有的连续实数值函数的集合；对任意两函数 $x\in X$ 和 $y\in X$，令

$$d(x,y)=\max_{t\in I}|x(t)-y(t)|.$$

例 2.5 X 与例 4 中的 X 相同

$$d(x, y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt.$$

例 2.6 X 为所有的有序 n 元实数. 对任意两个有序 n 元实数

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in X, \text{以及 } y=(y_1, y_2, \cdots y_n)\in X,$$

令

$$d(x, y)=\max_{0\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|.$$

从例 2.7 到例 2.10 的每个例子都不是距离空间.

例 2.7 X 为所有实数的集合,

$$d(x, y)=x^2-y^2.$$

例 2.8 X 为所有实数的集合,

$$d(x, y)=|x^2-y^2|.$$

例 2.9 X 为所有实数组成的集合

$$d(x, y)\begin{cases}x-1, & \text{当 } x\geqslant y,\\ 1, & \text{当 } x<y.\end{cases}$$

例 2.10 X 为沿着某一河岸(相对于地球是固定的, 并不随河水而流动)的所有点的集合. 对任意两点 $x\in X$ 与 $y\in X$, 令 $d(x, y)$ 等于从 x 到 y 所需的时间.

任一定义, 若它只依据距离的概念, 就可以将它直接地推广, 使之能应用于任意的距离空间. 为完善起见, 下面讲我们最感兴趣的一些问题.

令 X 与 Y 为距离空间, 它们各自以 d 与 e 为度量. 两点 $x_1\in X$ 和 $x_2\in X$ 为"δ-邻近", 当且仅当 $d(x_1, x_2)<\delta$. 同样, $y_1\in Y$ 为"e-邻近"于 $y_2\in Y$, 当且仅当 $e(y_1, y_2)<\varepsilon$. 变换 $f: X\to Y$"在 $x_0\in X$ 上连续", 当且仅当对每一 $\varepsilon>0$, 存在一 $\delta>0$, 使得若 x 为 δ-邻近于 x_0, 则 $f(x)$ 为 ε-邻近于 $f(x_0)$. 变换 f 为"连续", 当且仅当它在 X 的每一点上都连续. 一个同胚映射乃是具有连续的逆变换的一个 · · · ·

连续变换. 以 $x_0\in X$ 为圆心并且以 $r>0$ 为半径的开球是集合

$$B(x_0;r)=\{x:x\in X,\text{ 并且 } d(x_0,x)<r\}$$

有些作者把开球(*open ball*)称做开球面(*open sphere*), 但我们将保留球面(*sphere*)为集合†:

$$\{x:d(x_0,x)=r\}.$$

以 x_0 为圆心, $r>0$ 为半径的闭球(表示为 $B^-(x_0;r)$)乃是集合

$$B^-(x_0;r)=\{x:x\in X,\text{ 并且 } d(x_0,x)\leqslant r\}$$

例2.11 在例 2.4 的空间X中, 令 $x_0\in X$ 为恒等于 0 的函数; 即对所有 $t\in I$ 的值, $x_0(t)=0$. 开球 $B(x_0,1)$乃是所有的函数 $x\in X$ 组成, 它的图形位于图 2.1 中所示的矩形中.

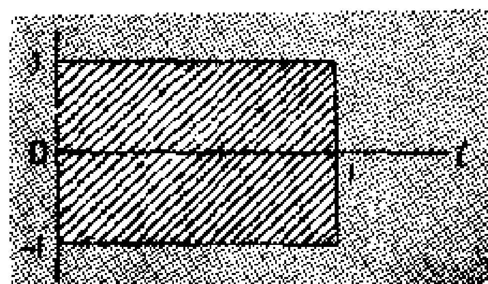


图 2.1

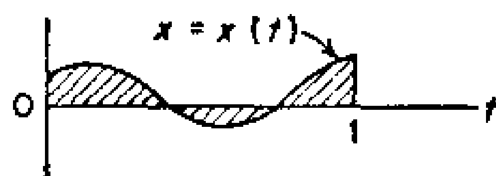


图 2.2

例2.12 在例 2.5 的空间X中, 令 $x_0\in X$ 为恒等于 0 的函数; 即: 对所有的 $t\in I$, $x_0(t)=0$. 开球 $B(x_0,1)$乃是一集合, 它包含使得以曲线 $x=x(t)$和直线 $x=0$, $t=0$, $t=1$ 为界的面积小于 1 的所有的 $x\in X$. 图 2.2 表示这样的一个面积. 注意, 在 t-轴以下的那部分面积并不以负值计算.

读者必须证明下面的定理作为练习. 这个结论将在证明后面的定理时应用.

定理 2.1 变换 $f:X\to Y$ 为连续, 当且仅当对每一 $x_1\in X$ 以及以 $f(x_1)$ 为中心的开球

$$B_1=B(f(x_1);\varepsilon)\subset Y$$

† 我们一般把 sphere 译成球面或球表面, 与作者的本意相同. ——译者注

存在以 x_1 为中心的一个开球

$$B_2 = B(x_1; \delta) \subset X$$

使得 $$B_2 \subset f^{-1}(B_1)$$

证明：当作练习去做. ≪

定理2.2 令 X 与 Y 皆为距离空间，分别以 d 和 e 为度量. $f: X \to Y$ 为连续的一个充分必要条件是，若 B_1 为 Y 中的一个开球，使得 $x \in f^{-1}(B_1)$，则存在一个开球 $B_2 \subset X$ 使得 $x \in B_2 \subset f^{-1}(B_1)$.

证明： 充分性. 假设定理的条件被满足，并且令 $B_1 = B(f(x_1); \varepsilon)$ 为 Y 中以 $f(x_1)$ 为中心的一个开球. 则 $x_1 \in f^{-1}(B_1)$. 因此在 X 中存在某一开球 $B_2 = B(x_2; r)$，使得 $x_1 \in B_2 \subset f^{-1}(B_1)$. 令 $\delta = r - d(x_2, x_1)$；因为 $x_1 \in B_2$，故 $\delta > 0$. 令 $B_2^* = B(x_1; \delta)$，则 B_2^* 是以 x_1 为中心的一个开球. 若 $x \in B_2^*$，则

$$d(x_2, x_1) \leqslant d(x_2, x_1) + d(x_1, x) \leqslant d(x_2, x_1) + \delta = r,$$

所以 $x \in B_2$. 由此，$B_2^* \subset B_2 \subset f^{-1}(B_1)$. 因此，由定理 2.1，$f$ 是连续的.

必要性. 若 f 为连续，则定理 2.1 的条件被满足. 假设 $B_1 = B(y_1, r)$ 为 Y 中的一个开球，而且 $x \in f^{-1}(B_1)$，则有 $f(x) \in B_1$，因此

$$\varepsilon = r - e(y_1, f(x)) > 0$$

令 $B_0 = B(f(x); \varepsilon)$；由三角不等式可得 $B_0 < B_1$. 但由定理 2.1 可知，存在以 x 为中心的一个开球 $B_2 = B(x; \delta) \subset X$，使得

$$B_2 \subset f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1),$$

当然 $x \in B_2$. ≪

下面定义两个概念，它们是我们以前未曾讨论过的. 这两个定义适用于任一距离空间. 稍后我们将看到这两个概念在更一般的情况里是很有意义的. 事实上，其中一个将在第 8-3 节里成为从距离空间推广到拓扑空间的基础.

距离空间X的一个子集U为“开的”，当且仅当对每一点$x\in U$，存在某一开球B，使得$x\in B\subset U$。一子集$F\subset X$为“闭的”，当且仅当F'为开。

如果U为开的，并且$x\in U$，则存在某一球B_1，使得$x\in B_1\subset U$。但是，因而存在以x为中心的一个球B_2，使得$B_2\subset B_1$。由此，集合$U\subset X$为开的，当且仅当对每一$x\in U$，存在某一球$B(x;r)\subset U$。此定义的形式说明为什么“开”这个字被选来描述这个概念，它就是“开扩的空间”的意思。若U为开的并且$x\in U$，则U包含充分靠近x的任何点。直观地说就是：从某些非常靠近x的点系位于U之外这个意义看，x不能是在U的“边”上。“闭”这个字的直观意义颇难描述。稍后我们将看到，它能以“被包围的”或“包含围着它的一个围墙”的意义来说明。

很容易看出存在一些既不是开的也不是闭的集合。在由所有的实数所组成的距离空间（例1），令

$A=\{x:x$为有理数$\}$与$B=\{x:x$为无理数$\}$，

则A与B都不是开集合，但A与B互为余集，因此两者皆不是闭的。一个更令人惊奇的结论是：存在某些集合，它们既是开的又是闭的。实际上，在例2.2中很容易看到，$B\left(x;\frac{1}{2}\right)=\{x\}$；就是说，每个半径为$\frac{1}{2}$的球包含恰仅一点。在这个距离空间里每个集合都是开的，因而结果是每个集合也是闭的。这是一个极端的例子。但是，在任一距离空间X中，空集合$\varnothing$与全空间X都既是开的又是闭的。

定理2.3 从距离空间X到距离空间Y的变换$f: X\to Y$为连续的，当且仅当对每一开集合$V\subset Y$，集合$f^{-1}(V)$为开的。

证明： 必要性。令f为连续的，令V为Y的一开子集，并且令x为$f^{-1}(V)$的一点。为了证明$f^{-1}(V)$为开的，我们将找出一个开球B，使得$x\in B\subset f^{-1}(V)$。因为$f(x)\in V$，所以存在一个开球B_1，

使得 $f(x)\in B_1\subset V$. 但因而 $x\in f^{-1}(B_1)$, 并且由定理 2.2, 存在一个开球 $B\subset X$ 使得

$$x\in B\subset f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(V).$$

充分性. 令 B_1 为 Y 中的一个开球并且令 x 为 $f^{-1}(B_1)$ 的一点. 因为 B_1 为一开球, 所以它是开的(习题 9); 因此, 由定理的条件, $f^{-1}(B_1)$ 也是开的. 因为 x 为开集合 $f^{-1}(B_1)$ 的一点, 故存在一个开球 B_2, 使得 $x\in B_2\subset f^{-1}(B_1)$, 而且, 由定理 2.2 可知 f 为连续的. ≪

定理 2.2 和 2.3 以两种方法刻划了两距离空间之间的连续变换. 定理 2.2 的条件通常比较便于利用, 但在更一般的空间里, 这个条件就成为毫无意义的了, 而定理 2.3 的条件将成为重要的一个.

习题

1. (a) 证明从例 2.1 到 2.6 的每一个例子都是距离空间.

   (b) 证明从例 2.7 到 2.10 的每一个例子都不是距离空间.

2. 下列例子中哪些是距离空间?

   (a) 集合 X 为所有实数的集合. 对 $x\in X$ 与 $y\in X$, 设 $d(x, y)=|x-y|$.

   (b) 集合 X 为实数的集合; 对 $x\in X$ 与 $y\in X$, 设 $d(x, y)=(x^2-y^2)^2$.

   (c) 集合 X 为一平面; 对 $x=(x_1, x_2)\in X$ 与 $y=(y_1, y_2)\in X$, 设

   $$d(x, y)=\max\{|x_1-y_1|,\ |x_2-y_2|\}.$$

   (d) 集合 X 为一平面; 对 $x=(x_1, x_2)\in X$ 与 $y=(y_1, y_2)\in X$, 设

   $$d(x, y)=\begin{cases}[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^{\frac{1}{2}}, & \text{当 } x_1\neq y_1,\\ 1, & \text{当 } x_1=y_1 \text{ 且 } x_2\neq y_2,\\ 0, & \text{当 } x_1=y_1 \text{ 且 } x_2=y_2.\end{cases}$$

3. 证明对点对 $x\in X$, $y\in X$ 而定义的一个实数值函数 d 为 X 中的一个度量当且仅当 d 满足两个条件.

   (a) $d(x, y)=0$, 当且仅当 $x=y$;

   (b) $d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(y, z)$.

4. 令 i 为从例 2.4 的距离空间到例 2.5 的距离空间上的恒等变换. 证明 i 为连续的, i^{-1} 是连续的吗?

5. (a) 令 X 为例 2.4 的距离空间, 并定义变换 f: $X \to X$ 为 $f(x)=y$, 其中

$$y(t)=\int_0^t x(t)\,dt$$

f 是连续的吗?

(b) 设 X 为例 2.5 的距离空间, 试解部分 (a) 的问题.

6. 证明 f: $X \to Y$ 为连续的一个充分必要条件为: 对每一 $x_1 \in X$ 以及对以 $f(x_1)$ 为中心的每一开球 $B_1=B(f(x_1), \varepsilon) \subset Y$, 存在一个以 x_1 为中心的开球 $B_2=B(x_1; \delta) \subset X$, 使得 $B_2 \subset f^{-1}(B_1)$.

7. 比较一下定理 2.2 的命题与第 7-3 节习题 5 的命题. 为什么习题里的命题必须比定理里的命题更复杂?

8. 证明在任一距离空间 X 中, 集合 ϕ 与 X 的每一个都既是开的又是闭的.

9. 证明开球是开的, 闭球是闭的.

10. (a) 证明任意两集合的交集为开的.

(b) 证明任何有限个开集合的交集为开的.

(c) 证明任何一族(不必是有限的)开集合的并集为开的.

*11. (a) 证明任何一族闭集合的交集为闭的.

(b) 证明任何有限个闭集合的并集为闭的.

12. 证明两距离空间之间的变换 f: $X \to Y$ 为连续的, 当且仅当对 Y 的每一闭子集 F, $f^{-1}(F)$ 必为 X 的闭子集.

13. 令 X 与 Y 分别为例 2.2 和习题 2(a) 的距离空间. 下列变换 f: $X \to Y$ 哪些是连续的? 哪些有连续的逆? (取 X 为实数集合.)

(a) $f(x)=x$,

(b) $f(x)=2x$,

(c) $f(x)=x^2$.

14. 对变换 f: $Y \to X$, 试作习题 13 中的问题.

15. 令 X 与 Y 分别为例 2.4 与 2.5 的距离空间. 下列变换 f: $X \to Y$ 哪些是连续的? 哪些有连续的逆?

(a) $f(x(t))=x(t)$,

(b) $f(x(t))=2x(t)$,

(c) $f(x(t))=[x(t)]^2$,

(d) $f(x(t))=x(t^2)$.

16. 对变换 $f: Y\to X$ 试作习题 15 的问题.

在下一节中考虑更一般的空间之前，我们再讨论距离空间中的两个概念——闭包与收敛性.

对距离空间 S 的任一子集 A, A 的闭包记成 A^-，它是以 A 为子集的最小的闭集合. 这就是

(i) A^- 为闭的.

(ii) $A^-\supset A$.

(iii) 若 F 为闭的且 $F\supset A$, 则 $F\supset A^-$.

很容易看到，每个集合 $A\subset X$ 都有闭包;就是说，永远存在一个以 A 为子集的最小闭集合. 因为: 可考虑为所有以 A 为子集的闭集合族$\mathscr{F}$(集合 X 当然是这一族中的一份子). 由上面的习题 11a, 这族中所有的集合的交集为一闭集合. 这个交集必以 A 为其子集合，并且必然是以 A 为子集的最小的闭集合. 由此我们看到，A 的闭包乃是所有的以 A 为子集的闭集合的交集. 就是说

$$A^-=\bigcap\{F: F\text{ 为闭的并且 }F\supset A\}$$

定理 2.4 当且仅当每一开球 $B(x;r)$ 至少有一点与 A 共有时;就是说当且仅当

$$A\cap B(x;r)\neq\varnothing$$

时，点 $x\in X$ 在子集 $A\subset X$ 的闭包中.

证明: 假设 $x\notin A^-$; 则 $x\in(A^-)'$. 但 $(A^-)'$ 乃是开集合. 因此存在一个开球 B_1 使得 $x\in B_1\subset(A^-)'$. 因为 $x\in B_1$, 故存在一个开球 B, 它以 x 为中心使得 $B\subset B_1$, 因而我们得到

$$B\subset B_1\subset(A^-)'\subset A'$$

由此 $A\cap B=\varnothing$

假设存在一个开球 $B=B(x;r)$, 使得 $A\cap B=\varnothing$, 则 B' 为一个以 A 为子集的闭集合，因此 $A^-\subset B'$. 因为 $x\in B$, 就必须 $x\notin A^-$. ≪

定理 2.4 说明了一个集合 A 的闭包包含着非常靠近 A 的点所

有的点．更确切地说，当且仅当对每一 $\varepsilon>0$，存在A的一个点，它 ε-邻近于 x 时，$x\in A^-$．

我们已经看到任一子集 $A\subset X$ 决定一个子集 A^-，它称为A的闭包．这意指闭包乃是在A的子集合上的一个单元运算．下一个定理给出了这个运算的一些最重要的性质．

定理 2.5 对任意X的子集S和T

(a) $\varnothing^-=\varnothing$, (c) $S^{--}=S^-$,

(b) $S^-\supset S$, (d) $S^-\cup T^-=(S\cup T)^-$.

证明： (a)因为$\varnothing$为闭的，并且是每个集合的子集，它显然是以$\varnothing$为子集的最小闭集合．就是说，$\varnothing^-=\varnothing$．

(b) 由闭包的定义，这是显然的．

(c) 因为 S^-其本身为闭的，它是以S为子集的闭集合之一．显然，它是以 S^-为子集的最小闭集合；即：$S^{--}=S^-$．

(d) 集合$(S\cup T)^-$是以S为子集的闭集合之一，因此 $S^-\subset(S\cup T)^-$．同样，$T^-\subset(S\cup T)^-$．而且这两个包含关系蕴涵了

$$S^-\cup T^-\subset(S\cup T)^-.$$

至于另一方向的包含，注意一下 S^-为以S为子集的一闭集合，而且 T^-为以T为子集的一闭集合．由此，$S^-\cup T^-$是一闭集合(上面的习题 11b)，它以 $S\cup T$ 为一子集．即得 $S^-\cup T^-\supset(S\cup T)^-$． ≪

例 2.13 令X为例2.4的距离空间，并令S为由其图形为有限条线段所组成的所有的函数 $x\in X$ 的集合．令 $x_2\in X$ 为定义作 $x_2(t)=t^2$ (对 $t\in I$) 的函数，则 $x_2\in S^-$．见图 2.3．它表示函数 x_2 的图形和以此图形为中线纵长为 2ε 的一段长带．明显地，对任一

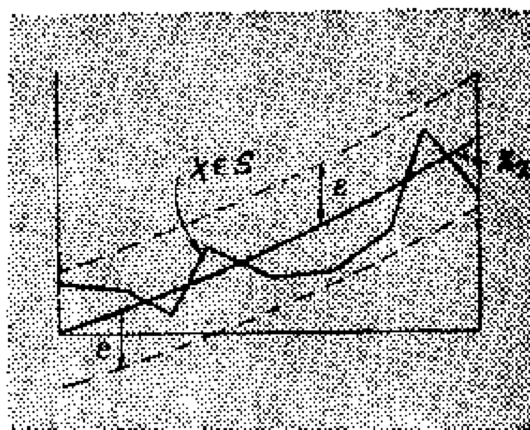


图 2.3

$x\in S, d(x_2, x)<\varepsilon$，当且仅当 x 的图形位于此长带之中。图 2.3 说明至少存在一个 $x\in S$，它满足这个条件。由此，对任一 ε，开球 $B(x_2; \varepsilon)$ 至少有一元素与 S 共有，因此，由定理 2.4，$x_2\in S^-$。

对闭包的概念我们已经有些认识了。现在我们来看收敛性。我们将看到收敛性 B 是与闭包有密切关系的一个概念。我们将集中讨论点列的收敛。

集合 X 中的一个点列乃是从集合 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 到 X 内的一个变换。点列所用的符号与一般变换所用的符号有些不同，不用字母，如 f，来表示这种变换，也不用 $f(n)$ 表示元素 $n\in N$ 的象，而是沿袭通常的习惯，用足码符号指明 $n\in N$ 的象，例如 x_n，并且将点列(变换)表记为 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ 或更简单地写成 (x_n)。此函数的值 x_n 称为点列的"第 n 项"。当然，对某些互异的 i 与 j，可能发生 $x_i=x_j$。例如：$(p, p, p, \cdots)$ 乃是集合 $\{p\}$ 的一个点列，此处

$$x_i=p, \text{对 } i=1, 2, 3, \cdots.$$

我们将只对距离空间里的点列感兴趣。

假设 $A\subset X$，并且 (x_n) 是 X 中的点列。点列 (x_n) 终归在 A 中，当且仅当存在某一 $n_0\in N$，使得对所有的 $n\geqslant n_0$，$x_n\in A$；就是说，点列中存在某一项(第 n_0 项)，使得后面的所有的数列的项都在 A 中。数列 (x_n) 频繁在 A 中当且仅当对每一 $n_0\in N$，存在某一 $n\geqslant n_0$，使得 $x_n\in A$。这一条件等价于要求数列有无限多个项为 A 的元素。

距离空间 X 中的一点列 (x_n) 收敛至一点 $x\in X$，当且仅当对以 x 为中心的每一开球 $B(x; r)$，此数列终归位于 $B(x; r)$ 中。我们写成 $x_n\to x$，或 $\lim x_n=x$ 来表记 (x_n) 收敛至 x；在这种情况下，我们称 x 为点列 (x_n) 的一个极限点。

例 2.14　令 X 为实数集合，并且对 $x\in X, y\in X$，定义

$$d(x, y)=|x-y|$$

(a) 设

$$x_n=(-1)^n(1/n),\quad n=1,2,\cdots$$

对中心位于 $x=0$ 的任一开球 B, 点列 (x_n) 终归位于 B 中；结果是 (x_n) 收敛至 0. 如果 $A=\{x:x>0\}$ 为所有的正实数的集合，点列 (x_n) 乃频繁(但非终归)位于 A 中.

(b) 设

$$x_n=(-1)^n n,\quad n=1,2,\cdots$$

此点列频繁位于正实数集中，但并不收敛至任一点.

例 2.15 (a) 令 X 为例 2.4 的距离空间，并且令 $x_n(n=2,3,4,\cdots)$ 为其图形表示在图 2.4 中的函数. 此点列 (x_n) 不收敛至任一点 $x\in X$. 这可由下面的说明看出：注意，对任一 $x\in X$,

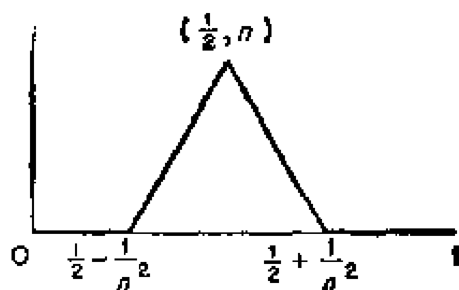


图 2.4

$$d(x,x_n)=\max_{t\in I}|x(t)-x_n(t)|$$

$$\geqslant\left|x\left(\frac{1}{2}\right)-x_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|x\left(\frac{1}{2}\right)-n\right|.$$

由此，对 $n>x\left(\frac{1}{2}\right)+1$, $d(x,\ x_n)>1$, 因而 (x_n) 就终归位于开球 $B(x;1)$ 的外部.

(b) 令 X 为例 2.5 的距离空间，并且令 $x_n(n=2,3,4,\cdots)$ 为其图形表示在图 2.4 中的函数. 则 $x_n\to x_0$, 其中对所有的 $t\in I$, $x_0(t)=0$. 实际上,

$$d(x_0,x_n)=\int_0^1|x_0(t)-x_n(t)|\,dt=1/n.$$

由此可得出对以 x_0 为中心的任一开球 B, 点列 (x_n) 必终归位于 B 中.

正如我们可能期望的那样，X 为实数集合并且

$$d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$$

的距离空间是相当重要的一个特殊例子．事实上，在任一距离空间中，点列的收敛性可以用在这个空间的收敛性来描述．令 Y 为一距离空间，以 e 为距离函数，并令 (y_n) 为 Y 中的一点列．则有 $y_n \to y_0 \in Y$，当且仅当点列 (y_n) 终归位于以 y_0 为中心的每一开球之中．即：当且仅当对任一实数 $r>0$，实数数列 $(e(y_0, y_n))$ 终归位于集合

$$A_r = \{x: 0 \leqslant x < r\}$$

之中．这个条件对实数列 $(e(y_0, y_n))$ 在距离空间 X 中收敛到 0 是充分且必要的．由此，任意距离空间 Y 中数列的收敛性可以用距离空间 X 中收敛到 0 这一事实来描述．

下列定理给出收敛性与闭包之间的联系．

定理 2.6 令 X 为一距离空间，并且令 $S \subset X$；点 $x \in X$ 为 S^- 的一元素，当且仅当 S 中存在一点列 (x_n)，它收敛至 x．

证明： 若 $x \in S^-$，则以 x 为中心的每一开球与 S 相交．选取

$$x_n \in S \cap B(x; 1/n)$$

则点列 (x_n) 终归位于以 x 为中心的每一开球之中，因此 $x_n \to x$．

如果 S 中存在一点列 (x_n) 收敛至 x，则这个数列终归位于以 x 为中心的每一开球之中；因此必然地，每个这种开球与 S 相交．由此，$x \in S^-$． ≪

定理 2.6 指出了“闭集合”一词的直观的内涵．一集合 A 为闭的，当且仅当 $A = A^-$（习题 17）．由定理 2.6，每当由 A 中的点组成的点列 (x_n) 收敛至一点 x，点 x 必须在 A 中，这是当且仅当的情况．直观地说，点列 (x_n) 收敛至 x，当且仅当点 x_n“非常接近”*于 x．因此，A 为闭的条件可表述为：“非常接近”A 中之点的任一点必是 A 中之一点．又：不可能偷偷地沿着 A 中的一个点列走而“非常接

---

*原文为 very close，而“闭的”英文为 closed．——译者注

近"一个不在 A 中的点. A 的点是封闭的——不可能偷偷地沿着 A 中的一个点列走而逃离 A.

习题(续)

17. 令 A 为距离空间的一个子集.

(a) 证明 A 为闭的, 当且仅当 $A=A^-$.

(b) 证明 A 为闭的, 当且仅当 A 为某个集合的闭包.

(c) 证明若 $A\subset B$, 则 $A^-\subset B^-$.

18. (a) 若 S 与 T 皆为某一距离空间的子集, 集合 $S^-\cap T^-$ 与 $(S\cap T)^-$ 的关系如何?

(b) $(S^-)'$ 与 $(S')^-$ 有何关系?

(c) 给出一开球 $B(x;r)$ 其闭包不同于闭球 $B^-(x;r)$ 的一个例子.

*19. 令 X 为一距离空间.

(a) 若 $p\in X$ 并且

$$x_n=p,\quad n=1,2,3,\cdots,$$

证明 $x_n\to p$.

(b) 若 $x_n\to x_0$ 并且 $n_1<n_2<n_3<\cdots$, 证明点列 $(x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \cdots)$ 收敛至 x_0. 点列 $(x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \cdots)$ 称为点列 (x_n) 的子列.

(c) 证明 (x_n) 有一子列收敛至 x_0, 当且仅当 (x_n) 频繁位于以 x_0 为中心的每个开球 $B(x_0,\ r)$ 中.

(d) 证明若 $x_n\to x$, 并且 $x_n\to y$, 则 $x=y$.

20. 令 (x_n) 为 X 中的一点列, 并令 A 为 X 的一子集. 证明 (x_n) 终归位于 A 中, 当且仅当 (x_n) 频繁位于 A' 为假.

21. 令 X 为实数集合, 并且, 对 $x\in X$, $y\in X$, 设

$$d(x,y)=|x-y|.$$

求下列 X 的每一子集的闭包.

(a) $A=\{1,2,3,\cdots\}$,

(b) $B=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\right\}$,

(c) $C=\left\{1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots\right\}$,

(*d*) $D=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 5,\ \cdots\right\}$.

(*e*) $E=\{x:0<x<1\}$.

(*f*) $F=\{x:x$ 为有理数$\}$.

(*g*) $G=\{x:x$ 为无理数$\}$.

22. 对习题 21 中从 A 到 G 的每一集合，在其闭包中选取一些点，并对你所选取的每一点 x 找出该集合中的一个收敛至 x 的点列. 这一过程可检验定理 2.6 的结论.

23. (*a*) 令 X 为例 2.4 的距离空间，并令 $x_n \in X$ 为定义作 $x_n(t)=t^n$（对所有 $t\in I$）的函数. 点列 (x_n) 收敛吗？若收敛，它的极限是什么？

24. 令 X 为实数集合，并且对 $x\in X$, $y\in X$, 设

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & 当\ x=y,\\ 1, & 当\ x\neq y,\end{cases}$$

描述这个距离空间的收敛性. 也就是说，说说哪些点列收敛到哪些点. 对于此空间里的一集合 A 的闭包你能说些什么？

*25. 令 $X=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 为非负整数的集合，并定义函数 d 如下：对

$$x\in X,\quad y\in X,\quad x\neq y,$$

令 b 为使 2^b 是 $|x-y|$ 的一个因数的最大的非负整数，则

$$d(x,y)=\frac{1}{b+1},\quad d(x,x)=0.$$

(*a*) 求：(i) $d(0,2)$, (ii) $d(4,19)$, (iii) $d(3,99)$.

(*b*) 证明函数 d 为 X 中的一个度量.

(*c*)† 证明点列 $(3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 3n,\ \cdots)$ 不收敛.

(*d*) 找出一个由 X 的不同元素所形成的点列，使得它收敛至 5.

(*e*) 求集合 $\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}$ 的闭包. [提示：首先证明若 n 为任一正整数，则

$$k_n=\frac{2^{2n+1}+1}{3}$$

也是一正整数. 对任一 $m\in X$ 考虑点列 $(3k_1m,\ 3k_2m,\ 3k_3m,\ \cdots)$, 并证明这一点列收敛至 m.]

---

†原书的小题(*c*)显然有误，暂去掉. 因而原(*d*), (*e*), (*f*)小题，依次改为(*c*), (*d*), (*e*)小题——译者

26. 复习已经给出的闭路径，封闭曲线，封闭表面，闭圆盘，闭球，闭集合的定义．它们有哪些相同之处？有哪些不同之处？

8-3 拓扑空间

在第 8-2 节中，我们定义并讨论了开集合，闭集合，闭包以及距离空间中的收敛性等概念．它们都是用度量来定义的，而且度量的性质(对称性，三角不等式，等等)也用来导出这些新概念的某些性质．由这些概念中的任何一个都可以得出距离空间的一种推广．这种推广可如下得到：首先在一集合 X 中公理式地给出合适的概念(不是用更基础的概念来定义它)，然后研究由这些公理所赋予集合 X 的结构．下面我们以“开集合”作为基本概念并以它来定义其它的概念．

一个**拓扑空间**就是一个集合 X 连同一个 X 的子集合族 $\mathscr{O}$，它满足下列条件：

(01) $X\in\mathscr{O}$， $\phi\in\mathscr{O}$.

(02) 若 $U\in\mathscr{O}$ 且 $V\in\mathscr{O}$，则 $U\cap V\in\mathscr{O}$.

(03) 若 $\mathscr{S}\subset\mathscr{O}$，则 $\bigcup\{A:A\in\mathscr{S}\}\in\mathscr{O}$.

集合族 $\mathscr{O}$ 的元素称为此拓扑空间中的**开集合**．这意思是说，命题“U 为开集合”等价于命题“$U\in\mathscr{O}$”.

由此，在任一拓扑空间中，空集合与集合 X 本身均为开集合；任意二开集合之交为开集合；任一组开集合的并集为开集合．

在给出一些拓扑空间的例子之前，了解另一个定义会是方便的．一集合 $A\subset X$ 称为**闭的**，当且仅当 A' 为开的．当然，在一拓扑空间中由所有的开集合组成的族 $\mathscr{O}$ 完全决定着所有的闭集合所组成的族 $\mathscr{C}$．事实上，

$$\mathscr{C}=\{A:A'\in\mathscr{O}\}.$$

反过来说，族 $\mathscr{C}$ 也决定着 $\mathscr{O}$，因为

$$\mathscr{O}=\{A:A'\in\mathscr{C}\}$$

很容易看出，上面我们在族$\mathscr{O}$上所做的从 01 到 03 三个要求等价于在族$\mathscr{C}$上的三个如下条件：

(c1) $\varnothing\in\mathscr{C}$，$X\in\mathscr{C}$.

(c2) 若 $F\in\mathscr{C}$ 且 $G\in\mathscr{C}$，则 $F\cup G\in\mathscr{C}$.

(c3) 若 $\mathscr{S}\subset\mathscr{C}$，则 $\bigcap\{A:A\in\mathscr{S}\}\in\mathscr{C}$.

对某一特定集合X可能有几个不同的X的子集合的族$\mathscr{O}$，正如下面的例子所指出的，它们都满足条件 c1 到 c3. 对$\mathscr{O}$的这样一种选取称为在此集合X中定义了一种拓扑. 显然，X中的拓扑可以由指定一个满足 c1 到 c3 三条件的X的子集的族$\mathscr{C}$来定义，因为这时族$\mathscr{O}$就为$\mathscr{C}$唯一地决定了. 这种方法也用于下面的一些例子里.

在从例 3.1 到例 3.5 的每一个例子里，集合X是实数集合. 这些拓扑空间之不同是由于选取了不同的开集合族$\mathscr{O}$.

例 3.1 $\mathscr{O}_1=\{\varnothing,X\}$. 由条件 01，这是在$X$中定义一个拓扑的最小的一族. 在此拓扑空间中，$\mathscr{C}_1=\{X,\ \varnothing\}$是这样的，它使得某一集合为开的，当且仅当它是闭的.

例 3.2 子集 $F\subset X$ 称为有限的，当且仅当F有有限个元素. 例如，$\varnothing$为有限，因为它有 0 个元素. 集合$\{2,3,8\}$为有限，因为它有 3 个元素. 集合 $N=\{1,2,3,\cdots\}$不是有限的. 令

$$\mathscr{F}=\{F:F\subset X \text{ 且 } F \text{ 为有限集合}\}$$

并且令

$$\mathscr{C}_2=\mathscr{F}\cup\{X\}$$

则 $\mathscr{C}_2$ 满足条件 c1 到 c3，并且因此它是定义于X中的某一拓扑的所有闭集合所组成的族. 在这一拓扑空间中，每一个有限集合都是闭的，集合X是闭的，并且没有其它集合是闭的. 由开集合所组成的族可给出如下：

$$\mathscr{O}_2=\{A:A=\varnothing \text{ 或 } A' \text{ 为} X \text{的有限子集}\}.$$

例 3.3 让我们称集合 A 为“可数的”，当且仅当存在 A 到正整数集合 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 内的一个一对一变换．每个有限集合是可数的，然而也有一些无限的可数的集合．例如，集合 $\{2, 4, 6, \cdots\}$ 与集合 N 本身一样是可数的．第 7-2 节习题 7 证明了由所有的正有理数的集合是可数的，但是集合 $\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 不是可数的．令

$$\mathscr{D}=\{A:A\subset X \text{ 并且} A \text{ 为可数的}\}.$$

并令 $\mathscr{C}_3=\mathscr{D}\cup\{x\}$．则 $\mathscr{C}_3$ 为定义在 X 中的某一拓扑的所有闭集合的族．在这个拓扑空间里，每个可数集合为闭的；集合 X 为闭的；并且没有其他的集合为闭的．开集合的族可由下式给出：

$$\mathscr{O}_3=\{A:A=\varnothing \text{ 或 } A' \text{ 为} X \text{的可数子集}\}.$$

例 3.4 令 $\mathscr{O}_4=\{A:A\subset X\}$．族 $\mathscr{O}_4$ 满足条件 01 到 03．显然，它是于 X 中定义拓扑的最大一族．（由 $\mathscr{O}_4$ 所定义的拓扑称为“离散”拓扑．）在这个拓扑中“集合为开的，当且仅当它为闭的”再次为真．即：$\mathscr{O}_4=\mathscr{C}_4$．前面我们已经见过这个拓扑空间，那时它是一个距离空间．族 $\mathscr{O}_4$ 是由所有的开集合——它们于距离空间 X 中为开的——所组成的，其中点 x 与点 y 之间的距离给定为：

$$d(x, y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=y,\\ 1, & \text{当 } x\neq y.\end{cases}$$

例 3.5 对每一实数 $x\in X$，令

$$L_x=\{y:y<x\};$$

并令 $\mathscr{L}=\{L_x:x\in X\}$.

则集合 $\mathscr{O}_5=\mathscr{L}\cup\{\varnothing, X\}$ 于 X 中定义一个拓扑．

习题

1. 证明例 3.1 到 3.5 的每个例子是拓扑空间. 在例 3.5 中所有的闭集合的族是什么?
2. 证明若 X 为任一距离空间, 而 $\mathscr{O}$ 为所有的 X 的子集的族, 它们在这距离空间里为开的, 则 $\mathscr{O}$ 满足条件 01 到 03. 因此 X 可被认为是一个拓扑空间. 由此, 开集合的这两种概念——一个在距离空间里, 另一个在拓扑空间里——不会引起任何混淆.
3. 证明并不是每一个拓扑空间都能被看成是一个距离空间. (提示: 试一下例 3.1 的空间.)
4. 令 X 为实数集合, 并令

$$I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

下列哪些族在 X 中定义着一个拓扑?

(a) $\mathscr{O}=\{A:I\subset A\subset X\}\cup\{\phi\}$.

(b) $\mathscr{O}=\{A:A\subset I\}\cup\{X\}$.

(c) $\mathscr{O}=\{A:I\not\subset A$ 且 $A\not\subset I\}\cup\{\phi, X\}$.

*5. 令 X 为定义在单位区间

$$I=\{t:0\leqslant t\leqslant 1\}$$

上的所有的连续函数的集合, 并令 $\mathscr{O}$ 为由满足下列条件的所有的 X 的子集 U 的族: 若 $x_0\in U$, 则存在一正实数 ε, 一正整数 n, 以及 n 个数 $t_1\in I$, $t_2\in I$, …, $t_n\in I$ 使得

$$U\supset\{x:|x(t_i)-x_0(t_i)|<\varepsilon(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\},$$

证明 X 连同族 $\mathscr{O}$ 为一拓扑空间.

*6. 令 $I^*=\{t:0\leqslant t\}$, 并令 X 为由定义在 I 上的所有的连续函数的集合. 如同习题 5 中一样地定义 X 的子集的族 $\mathscr{O}$. 证明 X 连同这族 $\mathscr{O}$ 为一拓扑空间.

在我们对距离空间之间的连续变换的定义中, 距离这个概念充当了很重要的角色. 因为这一定义与 ε-邻近等等相关. 当然, ε-邻近在拓扑空间里是没有意义的, 但是定理 2.3 的条件——它是距离空间之间的变换为连续的一个充分必要条件——在一般的

情况下是很有意义的，而我们正是用它来扩充我们对连续的定义.

令 X 与 Y 均为拓扑空间，变换 $f:X\to Y$ 为连续的，当且仅当对每一开集合 $V\subset Y$，集合 $f^{-1}(V)$ 在 X 中为开的. 注意，这个定义考虑的是连续，而不是"在 x_0 点上连续". 后面这个概念可以扩展到拓扑空间之间的变换，但我们不去扩展它. 一个**同胚映射**乃是一个连续变换，它具有一个连续的逆变换.

例 3.6 令 X 与 Y 每个都是例 3.5 中的拓扑空间. 定义两个变换 $f:X\to Y$ 与 $g:X\to Y$ 如下：

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x<0,\\ x, & \text{当 } x\geqslant 0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x<0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ 1, & \text{当 } x>0^*.\end{cases}$$

因为 X 与 Y 为同一个拓扑空间，我们可称两者皆为 X. 但是在连续性的定义中这两空间是作为不同的空间对待的，所以用符号来指出，我们所考虑的是哪个空间，是比较方便的. 我们将证明 f 是连续的，而 g 并不连续. 首先，考虑 f，并令 V 为 Y 中任一开集合. 分为几种情况讨论如下：

情况 1，$V=\varnothing$，则 $f^{-1}(V)=\varnothing$，它在 X 中是开的.

情况 2，$V=Y$，则 $f^{-1}(V)=X$，它在 X 中是开的.

情况 3，$V=L_y=\{Z:Z<y\}$.

(a) 若 $y\leqslant -1$，则 $f^{-1}(V)=\varnothing$，它在 X 中是开的.

(b) 若 $-1<y\leqslant 0$，则 $f^{-1}(V)=\{x:x<0\}$，它在 X 中是开的.

(c) 若 $0<y$，则 $f^{-1}(V)=\{x:x<y\}$，它在 X 中是开的.

这样，对每个开集合 $V\subset Y$，集合 $f^{-1}(V)$ 在 X 中是开的. 这就证明了 $f:X\to Y$ 是连续的.

现在考虑变换 g. 令 $V=\{y:y<1/2\}$；则 V 为 Y 的一个开子

---

*原文误为 $x<0$. ——译者注

集．但是 $f^{-1}(V)=\{x:x\leqslant 0\}$，它并不是 X 的一个开子集合．因此，$g:X\to Y$ 不是连续的．

我们像在距离空间里定义闭包概念完全一样在拓扑空间里定义闭包的概念．一集合 $A\subset X$ 的闭包 A^- 是以 A 为子集的最小闭集合．

由条件 $c3$，很容易证明每一集合 $A\subset X$ 都有一个闭包．就是说，存在一个以 A 为子集的最小闭集合．又：对任一集合 A，它的闭包 A^- 乃是闭集合，而且事实上，A 为闭的，当且仅当 $A=A^-$．

在前面的内容里，我们已经几次考虑了一个集合的边界或边．但我们对这一术语并没有一个清晰的定义．现在我们可以定义它了．在一拓扑空间中，一集合 A 的边界乃集合 $A^-\cap(A')^-$．

这样，当且仅当 $x\in A^{-1}$ 且 $x\in(A')^-$ 时，点 $x\in X$ 在 A 的边界上．我们可以将 A^- 的点看成是紧紧地附着在 A 上面的点．从这个观点来说，A 的边界就是由所有的紧紧附着在 A 上面也紧紧附着在 A' 上面的点组成的．这似乎是对边界或边的一个相当令人满意的解释．

注意，一集合 A 的边界是依赖于空间 X 以及特定的集合 A．有一个例子可以说明这一点．令 X_1 为通常的三维空间，选取一特定点 $x_0\in X_1$，并且考虑球面 $S=\{x:d(x_0,\ x)=1\}$．这个球面是距离空间 X_1 中的闭集，而且 $(S')^-=X_1$．由此，S 的边界是

$$S^-\cap(S')^-=S\cap X_1=S.$$

当它被考虑为通常的三维空间的子集时，球面就是它本身的边界．

现在，令 X_2 为球面 S，当我们使用通常的距离符号时，它乃是一个距离空间．再次，考虑 X_2 的子集 S．集合 S 是闭的，然而 $S'=\varnothing$，因此，在空间 X_2 中，S 的边界就是

$$S^-\cap(S')^-=S\cap\varnothing=\varnothing,$$

当球面被考虑为其本身的子集时，球面的边界就是空集合.

在前面的内容中，当我们提到某一表面的一小片区域时，我们是指把这一小片区域看成这个表面的一个子集. 当我们讲到一个立体的边界时，我们是把这个立体考虑为通常的三维空间的一个子集.

习题(续)

7. 令 X 与 Y 都是例 3.1 至 3.5 中的拓扑空间之一. 定义变换 i: $X\to Y$ 如下: 对每一 $x\in X$, $i(x)=x$. 选取哪些 X 与 Y，就可使变换 i 为连续的? 又选取哪些就可使得 i 为同胚映射?

8. X 与 Y 与习题 7 中的相同. 定义 f: $X\to Y$ 为 $f(x)=x^2$. 对 X 与 Y 的哪些选取使得 f 为连续的? 哪些选取使得 f 为同胚映射?

*9. (a) 令 A 为拓扑空间 X 的一个子集，并令 x 为 X 的一点. 证明 $x\in A^-$，当且仅当包含 x 的每一个开集合至少包含 A 的一个点.

(b) 证明两拓扑空间之间的变换 f: $X\to Y$ 为连续的当且仅当对每一闭集合 $F\subset Y$, $F^{-1}(Y)$ 为 X 的一个闭子集.

10. 将下列每一集合依次考虑为例 3.1 至 3.5 中的每个拓扑空间的一个子集，求出此集合的闭包和边界.

(a) $A=\{0, 1\}$,

(b) $B=\{x:0<x<1\}$,

(c) $C=\{x:0<x\leqslant 1\}$,

(d) $D=\{x:0\leqslant x<1\}$,

(e) $E=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$,

(f) $F=\{x:x<0\}$,

(g) $G=\{x:x\leqslant 0\}$,

(h) $H=\{x:x<0$ 或 $x>1\}$,

(i) $I=\{x:x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1\}$,

(j) $J=\{x:x\leqslant 0$ 且 $x\geqslant 1\}$.

11. 复习前面的内容中曾讨论过集合的边界的地方. (请看 pp. 41, 57, 58, 69, 81)

12. 证明课文里所说的下列命题：若X为一拓扑空间，则X的每一子集皆有闭包；A^-为闭集合；以及事实上，A为闭的，当且仅当$A=A^-$.

13. 令X为一集合，并令$^-$为一单元运算，使得对任一$A\subset X$，A^-也是X的一子集．进一步假设，对X的任意子集A与B，

    (a) $\varnothing^-=\varnothing$，　　　　(c) $A^{--}=A^-$，

    (b) $A^-\supset A$，　　　　(d) $A^-\cup B^-=(A\cup B)^-$.

    设$\mathscr{C}=\{A:A\subset X$ 且 $A^-=A\}$．证明$\mathscr{C}$满足条件$c1$到$c3$，因此X可以看成是一个拓扑空间．在这个空间里的闭包运算是什么？

我们现在把注意力转移到拓扑空间中点列的收敛性上来．在距离空间里，我们用开球定义点列的收敛性．怎样才能把这个概念推广到拓扑空间中呢？开球$B(x;r)$可以看成为建立了一个邻近性的标准．它包含着所有的r-邻近于x的点．我们已经知道，包含一点x的开集合可被看作包含所有"就在x周围"的点．由此，我们可以把包含x的每个开集合U看成为建立"邻近于x"的一个标准．而所有的U的点就可以称为U-邻近于x；所有的U'的点可以称之为不是U-邻近于x．在距离空间里的(x_n)收敛至x的思想现在可阐述如下：点列(x_n)收敛至x，当且仅当给定任一开球$B=B(x;\varepsilon)$（邻近于x的一个标准），点列(x_n)终归位于B中（依据给定的邻近的标准，终归邻近至x）．这些思想可直接推广到拓扑空间而引出下列的定义．

于拓扑空间X中，一点列(x_n)**收敛**至点$x\in X$，当且仅当此点列终归位于包含x的每一开集中．

例 3.1(续)　在例3.1的空间X中，令(x_n)为任一点列，并令x为任一点．包含x的仅有的开集合是X本身，并且(x_n)当然终归位于X中．由此，点列(x_n)收敛至x．就是说，在这个拓扑空间里，任一点列均收敛至X的所有的点．特别的是，拓扑空间里点列的极限可以不是唯一的．

我们已经知道，在距离空间中，某一点x在集合A的闭包中，

当且仅当在 A 中存在收敛至 x 的一个点列．拓扑空间里却没有这等快活事．(参看习题 16)这个命题在某些（非距离空间）拓扑空间中为真．并且对某些关于点列的概念的推广，它们的类似命题在任一拓扑空间中为真．但是这里我们不对它们作进一步的讨论．前面习题 9a 给出了对集合的闭包的一种刻划，它包括一些我们已经用来作为收敛性的基础的概念．

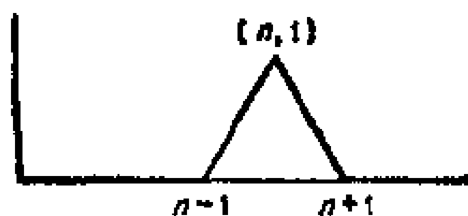


图 3.1

例 3.7 令 X 为前面习题 6 中的拓扑空间．令 $x_n\in X$ 为其图如图 3.1 所示的函数；并令 x_0 为定义如下的函数：

$$x_0(t)=0 \qquad (0\leqslant t).$$

我们来证明 (x_n) 收敛至 x_0．事实上，若 U 为包含 x_0 的任一开集合，则存在一个正数 ε，一个正整数 m，以及 m 个非负数 $t_1, t_2, \cdots, t_m$，使得

$$U\supset\{x: |x(t_i)-x_0(t_i)|<\varepsilon\ (i=1, 2, \cdots, m)\}.$$

让我们设

$$n_0=\max\{t_1, t_2, \cdots, t_m\},$$

则显然，若 $n>n_0$，它可导出

$$x_n(t_i)=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, m).$$

因此

$$|x_n(t_i)-x_0(t_i)|=0<\varepsilon \qquad (i=1, 2, \cdots, m).$$

因而对所有的 $n>n_0$，$x_n\in U$．就是说，点列 (x_n) 终归位于包含 x_0 的每一开集合中．结果，$x_n\to x_0$．

习题(续)

14．在例 3.2 到 3.5 中的拓扑空间里，哪些点列收敛到哪些点上？

15. 在习题 4 中的拓扑空间里，哪些点列收敛到哪些点上？

16. 举一例，使得一拓扑空间 X 与一子集 $A\subset X$ 有下述情况：存在一点 $x\in A^-$ 而在 A 中并无任何点列收敛至 x. （提示：试试例 3.3 中的空间.）

17. 证明在例 3.7 中函数 x_0 乃是点列 (x_n) 所收敛到的唯一的函数.

18. 令 X 为习题 6 中的拓扑空间. 在 X 中，定义点列 (x_n) 如下：

$$x_n(t)=2^{-(t-n)^2},$$

此点列收敛吗？若收敛，它收敛到什么函数？

19. (a) 令 X 为习题 5 中的拓扑空间，并令 R 为实数距离空间，其度量为：对任意实数 r_1, r_2,

$$d(r_1,\ r_2)=|r_1-r_2|.$$

对 $x\in X$ 与 $t\in I=\{t:0<t<1\}$,

$$x(t)\in R.$$

由此，若 (x_n) 为 X 中的点列，且 $t\in I$，则 $(x_n(t))$ 为 R 中的一个数列. 证明 (x_n) 于拓扑空间 X 中收敛至 x_0，当且仅当对每一 $t\in I$，$(x_n(t))$ 于距离空间 R 中收敛至 $x_0(t)$. 这种函数的收敛性称为"逐点收敛".

(b) 若 X 用习题 6 中的拓扑空间来代替，而 I 用 $I^*=\{t:t\geqslant 0\}$ 来代替，证明 (a) 中的结论保持正确.

20. 把第 8-2 节习题 19 的结果推广到拓扑空间 X 而得到下列结果：

(a) 若 $p\in X$ 且 $x_n=p$, $n=1,\ 2,\ \cdots$，则 (x_n) 收敛至 p.

(b) 若 $x_n\to x_0$ 且 $n_1<n_2<\cdots$，则 $(x_{n1},\ x_{n2},\ \cdots)$ 收敛至 x_0.

(c) 找出拓扑空间中的一个点列的例子，使得 $x_n\to x$ 且 $x_n\to y$ 但 $x\neq y$. （这就证明第 8-2 节习题 9d 的结果不能推广到拓扑空间. 第 8-2 节习题 19c 在下面习题 22 中考虑.）

*21. 令 X 为一平面，它所有的点都用直角坐标标记的，即

$$X=\{(x_1,\ x_2):x_1 \text{ 与 } x_2 \text{ 皆为实数}\}.$$

对每一点 $p=(p_1,\ p_2)\in X$，设

$$G_p=\{(x_1,\ x_2):x_1>p_1 \text{ 且 } x_2>p_2\}.$$

令 $\mathscr{G}$ 为由所有的形如 G_p 的集合的并集所组成的族. 就是说，$U\in\mathscr{G}$，当且仅当存在一子集 $P\subset X$，使得

$$U=\bigcup\{G_p:p\in P\}$$

(a) 证明 X 连同族 $\mathscr{G}$ 为一拓扑空间.

(b) 令 $x_n=(-1/n,\ 1/n)$. 此点列收敛吗？若收敛，它收敛至何处？

(c) 求集合 $A=\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ 的闭包[(b)的符号].

*22. 令 X 为平面的一子集，它由原点连同所有的坐标为正整数的点所组成的集合:

$$X=\{(0, 0)\}\cup\{(m, n): m=1, 2, \cdots, n=1, 2, \cdots\}.$$

然而，X 里的拓扑(定义于下面)并不是通常的拓扑．对每一正整数 m_0，集合

$$Cm_0=\{(m_0, n): n=1, 2, \cdots\}$$

称为在 X 中于 m_0 上的列．X 中的开集合定义如下:

X 的任一不含原点的子集皆为开的．

X 的子集 U，它包含原点，为开的，当且仅当存在一正整数 N，使得若 $m\geqslant N$，则 U 包含所有于 m 上的列 C_m，除了 C_m 中的有限个点以外．

(a) 设 X 的开集合定义如上，试证明它是一拓扑空间．

(b) 求 X 中一点列 (x_n)，使得 (x_n) 频繁位于每个包含原点的开集合，但不存在一 (x_n) 的子列收敛至原点．(这证明了第 8-2 节习题 19c 的结果不能推广到拓扑空间.)

8-4 连通集

我们曾经定义一个地图的面(*faces*)为一些分离的小片——由一表面上的网络所分割而成的．但这种一小片是什么？显然，它不同于一个子集．因为这种我们看作是面的两个小片可以形成这个表面的单个子集，但并不是地图的单个的面．我们曾几次使用片语“连通的小片”，但却不曾对“连通的”一词下个定义．在讨论约当曲线定理时，我们证明了某些点对能用多边形路径来连接．这些想法可以用来定义三维空间里的连通集合，但对任意的拓扑空间，则需要另一种不同的方法．看来首先定义“分离的”似乎较为便利．然后再用这个概念来定义“连通的”．直观地说，我们愿意称两集合 P 与 Q 为分离的，如果它们“彼此毫不相干”．确切的表达式(已发现它是富有成果的)如下：拓扑空间 X 的子集 P 与 Q 为分离的，当且仅当

$$P \neq \varnothing \neq Q \quad 且 P^{-} \cap Q = \varnothing = P \cap Q^{-}.$$

即:两者皆不为空集合．并且每一集合与另一集合的闭包不相交．例如,考虑一个 X-轴(作为三维空间的一子集)．设

$$P = \{x : x < 0\}, Q = \{x : x > 0\}; S = \{x : x \geqslant 0\},$$

则 P 与 Q 为分离的，但 P 与 S 并非分离的．

一子集 $A \subset X$ 为**连通的**，当且仅当 A 不是分离的两个集合的并集．在我们刚才讨论的 X-轴中，集合 $\{x : x \neq 0\}$ 不是连通的，因为它是分离的两个集合 P 与 Q 的并集．

在任一拓扑空间里，一个单元集(恰仅包含一个元素的集合)是连通的．因为:若

$$\{a\} = P \cup Q \qquad 并且 P \neq \varnothing, Q \neq \varnothing,$$

则 $$P = \{a\} = Q,$$

因此 $$P^{-} \cap Q \neq \varnothing$$

由此, $\{a\}$ 不是分离的两集合的并集．

例 4.1 在例 3.1 的拓扑空间 X 中，每一子集 A 都是连通的．因为:若

$$A = P \cup Q 且 P \neq \varnothing \neq Q,$$

则 $P^{-} = X$(X 为包含 P 的仅有的闭集合),因而

$$P^{-} \cap Q \neq \varnothing.$$

由此, A 不是离散的两集合的并集．

当然，一集合 A 是否为连通的依所考虑的拓扑空间而定．同样的一个集合可能为某一空间的连通子集，而当它被考虑为另一空间的子集时则不连通．

若一集合 A 是连通的，而且若我们把"非常接近"A 的点附加到 A 上，则这个扩大了的集合也是连通的．这一命题看来似乎是正确的,下面的定理使得这一概念精确化．

定理 4.1 若 A 为拓扑空间 X 中的一连通集合，则 A^{-} 为连

通的.

证明: 用反证法证明. 假设 A^- 不是连通的, 则 $A^-=P\cup Q$, 其中 P 与 Q 为分离的两集合. 若 $A\cap P$ 与 $A\cap Q$ 皆为非空集,则

$$A=(A\cap P)\cup(A\cap Q).$$

将 A 表示为分离的两集合的并集. 这与我们的假设矛盾. 由此, 其中至少有一集合为空集合, 且设 $A\cap P=\varnothing$. 则因为 $A\subset P\cup Q$, 所以 $A\subset Q$. 这蕴涵了 $A^-\subset Q^-$. 但这样就有

$$P\subset P\cup Q=A^-\subset Q^-.$$

因此, $P=P\cap Q^-$, 这与我们所假设的 P 与 Q 为分离的两集合—— $P\cap Q^-=\varnothing$ 相矛盾. ≪

连通性乃是(集合的)一种拓扑性质. 事实上, 下述定理证明, 若一集合为连通的, 它甚至可以在一个比同胚映射更一般的变换类的作用下仍然保持其连通性.

定理 4.2 令 X 与 Y 皆为拓扑空间; 令 A 为 X 中一连通子集, 并令 $f:X\to Y$ 为连续变换. 则 $f(A)$ 为 Y 中的一连通子集.

证明: 用反证法证明. 若 $f(A)$ 不是连通的, 则有 $f(A)=P\cup Q$, 其中 P 与 Q 互为分离的. 设

$$P_1=f^{-1}(P)\cap A,\text{ 且 }Q_1=f^{-1}(Q)\cap A;$$

则我们可得

$$P_1\neq\varnothing\neq Q_1\text{ 并且 }A=P_1\cup Q_1.$$

因为 f 为连续的, $f^{-1}(P^-)$ 为 X 中的一闭集合(第 8-3 节习题 9b), 它以 P_1 为一子集. 由此, $P_1^-\subset f^{-1}(P^-)$ 而且

$$P_1^-\cap Q_1\subset f^{-1}(P^-)\cap f^{-1}(Q)$$
$$=f^{-1}(P^-\cap Q)=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing.$$

同样, $P_1\cap Q_1^-=\varnothing$. 因此 P_1 与 Q 互为分离的. 这与假设 A 为连通的相矛盾. ≪

实数集合 R 的度量为: 对 R 的任二点 x 与 y

$$d(x,y)=|x-y|,$$

所构成的距离空间乃是一个非常重要的空间．我们曾经常地用这个空间来作例子，而且，许多拓扑里的概念也都是从实数的某些性质的推广中产生的．在本书以后部分中，我们将用 R 来表示这个距离空间而且讨论它的一些性质．在距离空间 R 中，集合 R 是连通的．这一事实有时候作为公理之一用来定义实数，有时候是由作为公理的其它结论来证明它．这里我们假定这个结果成立，并且找出其它连通的 R 的子集．

R 的一子集称为一"区间"，当且仅当对某些点 $a\in R$, $b\in R$, 它为下列集合之一：

$$\{x:a<x<b\},\quad \{x:a\leqslant x\leqslant b\},\quad \{x:x<b\},$$
$$\{x:a\leqslant x<b\},\quad \{x:a<x\},\quad \{x:x\leqslant b\},$$
$$\{x:a<x\leqslant b\},\quad \{x:a\leqslant x\},\quad R.$$

区间的一些例子如：$\varnothing$, $\{2\}$, $\{x:0\leqslant x<1\}$. 很容易看出一集合 $A\subset R$ 为一区间，当且仅当它包含着它的任意两元素之间的所有的点．就是说，当且仅当下列的推论式为真．若

$$x\in A \text{ 且 } y\in A \text{ 以及 } x<z<y,$$

则

$$z\in A.$$

在证明以下定理时，我们将用到区间的这种特性．

定理 4.3 一子集 $A\subset R$ 为连通的当且仅当它为一个区间．

证明： 假设 $A\subset R$, 并且 A 不是一个区间，则存在三个实数 $a<c<b$, 使得

$$a\in A,\quad b\in A,\quad c\notin A$$

设 $\qquad P=\{x:x\in A \text{ 且 } x<c\},\ Q=\{x:x\in A \text{ 且 } x>c\}.$

则 $$P\neq\varnothing\neq Q,$$

并且 $$P^-\cap Q\subset\{x:x\leqslant c\}\cap Q=\varnothing.$$

同样，$P\cap Q^{-}=\varnothing$. 因此，P 与 Q 互为分离的. 由此可得 A 不是连通的.

剩下要证明每一个区间都是连通的. 首先，我们来考虑

$$I=\{x: -1<x<1\}.$$

对 $x\in R$，设

$$f(x)=\frac{x}{|x|+1},$$

则 $f: R\to I$ 为从 R 到 I 上的一个变换. 下面我们证明 f 为连续的. 由于假设 R 为连通的，定理 4.2 证明 I 为连通的.

关于 f 的连续性证明如下：若 x 与 y 同号，则

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{(|y|+1)x-(|x|+1)y}{(|x|+1)(|y|+1)}\right|$$

$$=\left|\frac{x-y}{(|x|+1)(|y|+1)}\right|\leqslant|x-y|$$

若 x 与 y 为异号，则

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{x}{|x|+1}-\frac{y}{|y|+1}\right|$$

$$=\frac{|x|}{|x|+1}+\frac{|y|}{|y|+1}\leqslant|x|+|y|=|x-y|$$

从而，f 的连续性得证.

由定理 4.1，$I^{-}=\{x: -1\leqslant x\leqslant 1\}$ 为连通的. 定理 4.3 剩余部分的证明留作练习(习题 5). ≪

习题

1. 证明空集合为连通的.
2. (a) 证明在例 3.4 的空间中，任何包含两点以上的集合皆不连通.
   (b) 令 Y 为例 3.4 中的空间，并令 X 为任一拓扑空间，证明 X 为连通的，当且仅当每一连续变换 $f: X\to Y$ 必是常量变换.
3. 在例 3.5 中的空间里，哪些集合是连通的？

4. (*a*) 证明若A与B为拓扑空间X的两连通子集，并且$A\cap B\neq\varnothing$，则$A\cup B$为连通的.

(*b*) 证明若A为连通的，并且$A\subset B\subset A^-$，则B为连通的.

5. 下列步骤完成了定理 4.3 的证明.

(*a*) 假设$a\in R$，$b\in R$，而且$a<b$. 对

$$x\in I=\{x:0<x<1\}$$

定义

$$f(x)=\frac{1}{2}[(b-a)x+(b+a)].$$

证明f为从I到$\{x:a<x<b\}$上的一连续变换. 因此，由定理 4.2，后者那个集合是连通的.

(*b*) 对每个$a\in R$，定义从R到$L_a=\{x:x<a\}$上的一连续变换f_a. 由此而证明L_a是连通的.

(*c*) 考虑所剩下的区间类型，完成定理 4.3 的证明.（提示：利用习题 4 于其中某些情况.）

6. 令$f:R\to R$为一连续变换，并令a，b和r为三个实数使得

$$f(a)<r<f(b)$$

证明存在一$c\in R$使得$a<c<b$并且$f(c)=r$. 简单地说：f遍历了它的任意两个值之间的所有的值.

7. (*a*) 令A与B为拓扑空间X中的两个非空开集合，使得其中任一个不是另一个的子集. 证明$A-B$与$B-A$为分离的.

(*b*) 把(*a*)中的"开"换以"闭"，证明同样的结果.

8. 在第 8-3 节习题 21 中的拓扑空间中，下列哪些集合是连通的？

(*a*) $A=\{(x_1,\ x_2):x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$,

(*b*) $B=\{(x_1,\ x_2):2\leqslant x_1^2+x_2^2\leqslant 4\}$,

(*c*) $C=A\cup B$,

(*d*) $D=A\cup\{(x_1,\ x_2):(x_1-4)^2+(x_2-4)^2<1\}$,

(*e*) $E=A\cup\{(x_1,\ x_2):(x_1-4)^2+(x_2+4)^2<1\}$.

9. 复习前面课文中那些我们要求一个集合为"全在一小片中"的部分.（参看 *pp*. 56, 57, 65, 67, 80）

8-5 紧致集

拓扑空间X的子集合族$\mathscr{F}=\{F:F\in\mathscr{F}\}$称为集合$A\subset X$的一个**复盖**，当且仅当

$$A\subset\bigcup\{F:F\in\mathscr{F}\}.$$

一个复盖称作**开复盖**，当且仅当此族中的每一集合皆为开的．复盖$\mathscr{F}$的一个子复盖是族$\mathscr{F}$的一个子族，它也是(某个集合A的)一个复盖．例如，若A为一距离空间X的一个子集，X中的所有开球的族$\mathscr{B}$为A的一开复盖；它的中心在A内半径为1的所有开球的族乃是$\mathscr{B}$的一个子复盖．

我们把这些术语用来定义紧致性．拓扑空间X中的一集合A为"紧致"，当且仅当A的每一开复盖都具有一个有限的子复盖．显然，在任一拓扑空间中，任一有限集合

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\subset X$$

必为紧致．因为：若$\mathscr{U}=\{U:U\in\mathscr{U}\}$为$A$的一开复盖，并且$1\leqslant i\leqslant n$，我们可以选取一元素$U_i\in\mathscr{U}$，使得$a_i\in U_i$，则$U_1, U_2, \cdots, U_n$所组成的族为$\mathscr{U}$的一个有限子复盖．

距离空间R不是紧致，因为如果我们设

$$I_n=\left\{x:n-\frac{1}{4}<x<n+\frac{5}{4}\right\},$$

则

$$\mathscr{U}=\{I_n:n=\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$$

为R的一开复盖，而它没有任何有限子复盖．在考虑其它例子之前，我们将讨论紧致性的某些结论．

集合族$\mathscr{F}$称为具有"有限交性质"，当且仅当$\mathscr{F}$的每一有限子族皆具有非空的交集．定理5.1使用有限交性质刻划了紧致空间．

定理 5.1 一拓扑空间X为紧致的，当且仅当在$\mathscr{F}$为具有有

限交性质的一族闭集合时，则 $\mathscr{F}$ 中所有的集合的交 $\bigcap\{F:F\in\mathscr{F}\}$ 不是空集合.

证明： 假设 X 不是紧致的，则存在一组 X 的开复盖 $\mathscr{U}$；它没有有限子复盖. 设 $\mathscr{F}=\{F:F'\in\mathscr{U}\}$；$\mathscr{F}$ 为一族闭集合. 若 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ 为 $\mathscr{F}$ 的任一有限子族，则集合族

$$\mathscr{U}_1=\{F_1', F_2', \cdots, F_n'\}$$

为 $\mathscr{U}$ 的一有限子族. 因为 $\mathscr{U}_1$ 不是 X 的一个复盖，所以存在一点 $x\in X$，使得

$$x\notin F_i', \qquad (i=1, 2, \cdots, n),$$

显然，

$$x\in F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n,$$

因而 $\mathscr{F}$ 具有有限交性质. 因为 $\mathscr{U}$ 为 X 的一个复盖，故每一点 $x\in X$ 必包含于某一 $U\in\mathscr{U}$ 内，因而结果是 $x\notin U'\in\mathscr{F}$. 由此，X 的任一点皆不同时包含于所有的集合 $F\in\mathscr{F}$.

$$\bigcap\{F:F\in\mathscr{F}\}=\varnothing.$$

现在假设 X 为紧致的，并令 $\mathscr{F}$ 为一族闭集合，使得

$$\bigcap\{F:F\in\mathscr{F}\}=\varnothing,$$

则

$$\mathscr{U}=\{u:u'\in\mathscr{F}\}$$

为 X 的一个开复盖，并且因为 X 是紧致的，故存在一个有限子复盖 $\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$. 设

$$F_i=U_i' \qquad (i=1, 2, \cdots, n);$$

则

$$\left(\bigcap_i F_i\right)'=\bigcup_i(F_i')=\bigcup_i(U_i)=X.$$

由此，$\bigcap\limits_i F_i=\varnothing$. 因此 $\mathscr{F}$ 没有有限交性质. ≪

定理 5.1 的命题通常用来证明某些有关存在性的定理．假设 X 是紧致的，而我们想证明，存在某一点 $x\in X$ 满足给定的无限多个条件．就是说，我们想证明，这些条件是一致的(不相矛盾的)．如果对这些条件的每一个，由满足这个条件的点所组成的集合为闭的，并且如果这些条件中的任何一组有限个条件皆为一致的，则定理 5.1 断言了存在一点，它满足所有的这些条件．

在一距离空间的一紧致子集中，正如下面定理所指出的，点列的收敛性有些很好的结果．

定理 5.2　若 A 为距离空间 X 中的一紧致子集，而且 (x_n) 为 A 中的一点列，则 (x_n) 的某个子列收敛至 A 中的某一点．

证明：由第 8-2 节习题 19c 可知，我们只需证明存在一点 $x_0\in A$，使得 (x_n) 为频繁位于包含 x_0 的每一开集合之中．此用反证法来证明．假设不存在这种点 x_0；则对每一点 $x\in A$，存在一包含 x 的开集合 U_x，使得 U_x 仅包含点列 (x_n) 中的有限个点．集合族

$$\mathscr{U}=\{U_x:x\in A\}$$

为紧致集合 A 的一个开复盖，因此存在一有限子复盖，称作 $\{U_1, U_2, \cdots, U_m\}$．因为在这个有限子复盖中的每一集合皆只包含点列 (x_n) 中的有限个项，所以点列 (x_n) 仅有有限个项在并集

$$U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_m$$

之中．但这是荒谬的．因为 (x_n) 在 A 中，而 A 是这个并集的子集．≪

定理 5.2 给出了“紧致”这一术语的直观意义．这个术语应该理解为：集合的所有的点以某种方式“紧密地挤在一起”．定理 5.2 还断言，每一点列皆有一收敛的子列；就是说，某一子列的所有的项“接近”于某一点，因而结果是各个项彼此非常接近．定理 5.2 的叙述乃一种蕴涵关系，而不是一种等价关系．若 A 为一距离空间的一子集，使得 A 中的每一点列皆有一子列收敛至 A 中一点，则

A 为紧致的. 这一命题为真 [证明请参看 Hall, Dick Wick, Spencer 的书《Elementary Topology》定理 4.16, P. 109].

紧致性的概念是一个拓扑性质. 事实上, 正与连通性一样, 甚至在比同胚映射更为一般的变换的作用下, 紧致性仍然存在.

定理 5.3 令 X 与 Y 为两拓扑空间; 令 $f: X \to Y$ 为一连续变换, 并令 A 为 X 中的一紧致子集; 则 $f(A)$ 为 Y 的一紧致子集.

证明: 如果 $\mathscr{V}=\{V: V\in\mathscr{V}\}$ 为 $f(A)$ 的任一开复盖, 则

$$\mathscr{U}=\{f^{-1}(V): V\in\mathscr{V}\}$$

为 A 的一开复盖. 因为 A 是紧致的, 故存在 $\mathscr{U}$ 的一个有限复盖

$$\{f^{-1}(V_i): i=1, 2, \cdots, n\}.$$

由此可推出

$$\{V_i: i 1, 2, \cdots, n\}$$

复盖着 $f(A)$, 而它是 $\mathscr{V}$ 的一个子复盖. ≪

我们已经知道距离空间 R 不是紧致的. 然而, 存在一些重要的 R 的紧致子集.

定理 5.4 在空间 R 中, 集合

$$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$$

是紧致的.

证明: 令 $\mathscr{U}=\{U: U\in\mathscr{U}\}$ 为 I 的一个开复盖; 我们将证明 $\mathscr{U}$ 具有一有限子复盖. 我们的想法是: 从 0 开始, 看看用 $\mathscr{U}$ 中的有限个集合可以向 1 前进多远. 如果我们能到达 1, 那么我们的目的就达到了. 对每一 $b\in I$, 设

$$I_b=\{x: 0\leqslant x\leqslant b\},$$

并且定义

$$B=\{b: b\in I, \text{而且 } \mathscr{U} \text{ 中的某些有限个集合的复盖 } I_b\},$$

显然, $0\in B$; 没有任一负数在 B 中(因为负数皆不在 I 中); 而且, 若 $c\in B$ 且 $0<b<c$, 则 $b\in B$. 由此 B 是一个区间. 令实数 r 为 B 的

左端点(必存在一个右边的端点,因为 $B\subset I$);我们要证明 $r=1$. 若不然,令 U_0 为 $\mathscr{U}$ 的一元素,使得 $r\in U_0$. (图 5.1)在 U_0 中选取两点 b 与 c 使得 $b<r<c$. 则 $b\in B$, 因此存在 $\mathscr{U}_0$ 的一个有限的子族.

$$\{U_1, U_2, \cdots, U_n, U_0\}$$

它复盖 I_b. 但是因而有

$$\{U_1, U_2, \cdots, U_n, U_0\}$$

复盖 I_c. 这与 r 为 B 的右边端点的定义相矛盾. 由此, $r=1$.

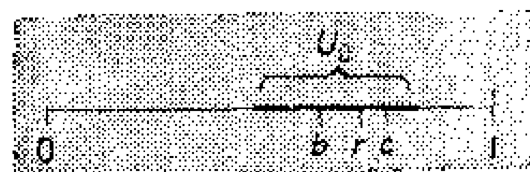


图 5.1

至此,我们已经证明了 B 为以 0 与 1 为端点的一个区间, 并且 $0\in B$. 这样剩下两种可能性: 或则是

$$B_1=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\} \qquad \text{或则是 } B_2=\{x:0\leqslant x<1\}$$

如同上面所述, 可看出 B 不可能为 B_2. 因为, 如果对不论怎样的 $b\in B_2$, $\mathscr{U}$ 对 I_b 有着有限的子复盖, 则再附上 $\mathscr{U}$ 的另一个集合我们即可得到 I 本身的一个有限复盖. 由此可得 $B=B_1$, 因此定理得证. ≪

R 的紧致子集在习题 5 中进一步讨论.

令 X 与 Y 为距离空间, 并且 X 为紧致的. 在这种情况下, 一个连续变换 $f:X\to Y$ 通常满足多少比连续性更强的条件. 回忆一下, f 为连续的, 当且仅当对每一 $\varepsilon>0$, 以及每一 $x_0\in Y$, 存在一 $\delta>0$, 使得若 x 为 δ-邻近于 x_0, 则 $f(x)$ 为 ε-邻近于 $f(x_0)$. 我们已经知道(第 7 章中的例 3.5), 在一般情况下, δ 可能依 x_0 与 ε 而定. 如果 X 为紧致的, δ 可以被选取为只依 ε 而定, 而这个 δ 的同一个值将满足所有的点 $x_0\in X$. 我们将在

$$X=I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$$

这一特殊情况下证明这个定理.

定理 5.5 令 Y 为一距离空间, 并令 $f:X\to Y$ 为一连续变换, 则对任一 $\varepsilon>0$ 存在一 $\delta>0$, 使得若 a 与 b 为 I 的点, 并且 $|a-b|$

$<\delta$, 则 $f(a)$ 与 $f(b)$ 互为 ε-邻近.

证明: 令 $\varepsilon>0$ 为给定的. 因为 f 为连续的, 所以对每一 $x\in I$, 可以找出一开球 $B_x=B(x;r_x)$, 使得 $f(B_x)$的每一点皆为$\frac{\varepsilon}{2}$-邻近于 $f(x)$. 集合族

$$\mathscr{B}=\{B_x:x\in I\}$$

乃是紧致集合 I 的一个开复盖. 选取一个有限子复盖

$$\mathscr{B}_1=\{B_{x_i}:i=1,2,\cdots,n\}$$

现在(习题 6)选取 $\delta>0$,使得若 a 与 b 为 I 中的点并且 $|a-b|<\delta$, 则存在

$$B_{x_i}\ \ (i=1,2,\cdots,n)$$

中的某一集合包含 a 与 b. 若 a 与 b 为 I 的任意点, 并且 $|a-b|<\delta$, 选取 x' 使得 a 与 b 同时在 B_{x_i} 中, 并且以 e 表示 Y 中的距离函数. 我们可得

$$e(f(a),f(b))\leqslant e(f(a),f(x'))+e(f(x'),f(b))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

这就是我们所要的结论. $\ll$

习题

1. (*a*) 证明在例 3.1 的空间里, 每一子集皆为紧致的.

   (*b*) 证明在例 3.2 的空间里, 每一子集皆为紧致的.

   (*c*) 例 3.4 的空间中, 哪些子集是紧致的?
2. 令 X 为一拓扑空间, 并令 A 为 X 的一子集. 证明 A 为紧致的, 充要条件是: 每当 $\mathscr{F}$ 为一族闭集合使得 $\mathscr{F}$ 的每一有限个集合的交皆与 A 相交, 则 $\mathscr{F}$ 的所有的集合的交与 A 相交.
3. (*a*) 证明在一距离空间里, 每一紧致集合皆为闭的.

   (*b*) 举一例, 要求某一集合 A 为一拓扑空间的紧致子集而 A 并不是闭的.
4. 证明紧致集合的闭子集是紧致的,

5. (a) 证明距离空间 R 的每一紧致子集皆为闭的而且是有界的.

(b) 令 a 与 b 为 R 中任意一点, 证明 $\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$ 为紧致的.

(c) 证明 R 的一子集 A 为紧致的, 当且仅当 A 为闭的而且是有界的.

6. 令 $I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$ 为距离空间 R 的一子集, 并令

$$\mathscr{B}_1=\{B(x_i,\ r_i):i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

为 I 的一个复盖, 它包含有限个开球. 证明 存在一 $\delta>0$ 使得若 a 与 b 为 I 中的点, 并且 $|a-b|<\delta$, 则存在开球

$$B(x_i;\ r_i)\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

中的某一开球包含 a 与 b.

7. 在 $Y=R$, 且 $f:I\to Y$ 定义为

$$f(x)=(4x-1)^2$$

的情况下, 检验定理 5.5 的结果. 给定 $\varepsilon>0$, 找出 $\delta>0$ 的值, 使得定理里的条件被满足.

8-6 完备集

完备性这一概念(定义在下面)可使用于距离空间, 但不是所有的拓扑空间中都能使用它. 因此, 在本节里, 所有我们讨论的空间都是距离空间. 在定义完备性时需要用到点列的某一特性.

距离空间 X 中的一点列 (x_n) 称作一个"科厍"点列, 当且仅当给定任一 $\varepsilon>0$, 存在一个正整数 n_0, 使得点列中超出第 n_0 项的任意两点互为 ε-邻近. 以 d 作为 X 中的距离函数, 我们可以把这个定义里在"使得"二字之后的要求叙述如下: 若 $n>n_0$, 且 $m>n_0$, 则 $d(x_n, x_m)<\varepsilon$. 此定义的概念是这样的, 若 $\varepsilon>0$, 则点列的最后的点互为 ε-邻近. 一距离空间为**完备的**, 当且仅当 X 中每一科厍点列皆收敛至 X 中某一点. 一子集 $A\subset X$ 为完备的, 当且仅当 A 中的每一科厍点列皆收敛至 A 中一点.

例 6.1 令 $X=\{x:x>0\}$ 为所有正实数的集合, 并定义

$$d(x, y)=|x-y|.$$

设 $x_n=\dfrac{1}{n}$; 则 (x_n) 为一科厍点列. 但是 X 中不存在任何一点为此

点列所收敛到的点. 因此 X 不是完备的.

例 6.2 令 X 为任一集合, 并且对任意 $x\in X, y\in X$, 定义

$$d(x, y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=y,\\ 1, & \text{当 } x\neq y,\end{cases}$$

则 X 为一距离空间. 如果 (x_n) 为 X 中之一科犀点列, 则点列最终要使点列的任意两点互为 $\frac{1}{2}$-邻近. 但是, X 中两点互为 $\frac{1}{2}$-邻近, 当且仅当它们为同一点. 由此, X 中每一科犀点列必须终归位于某一单元集中. 显然, 这样的点列一定收敛. 因而空间 X 为完备的.

直观地说, 某些事物, 若"无一应存在之物遗失"时, 则它就是完备的. 一完备空间的定义要求, 对每个点列, 如果它的点适当地互相邻近, 则必存在此空间中的一点, 使得此点列收敛到此点上. 这对"无一应存在之点遗失"是一个十分合理的解释.

例 6.1 指出一个科犀点列可能不收敛. 下面的定理阐述一个收敛点列必须是一个科犀点列.

定理 6.1 在距离空间 X 中, 若点列 (x_n) 收敛至 x, 则 (x_n) 为一科犀点列.

证明: 令 $\varepsilon>0$ 为给定的. 因为 $x_n\to x$, 此点列必终归位于开球 $B=B\left(x; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ 中. 注意 B 中的任意两点必互为 ε-邻近. 此证完成. ≪

定理 6.2 一距离空间的紧致子集必是完备的.

证明: 设 A 为距离空间 X 的一个紧致子集, 并令 (x_n) 为 A 中的一个科犀点列. 由定理 5.2, (x_n) 的某一子列收敛至 A 中的某一点, 而这就蕴涵着 (x_n) 收敛至同一点(习题 4). ≪

例 6.3 距离空间 R 乃是完备的, 但不是紧致的. 我们在第 8-5 节里已经知道 R 不是紧致的, 所以这里只须证明 R 为完备的. 令 (x_n) 为 R 中的一个科犀点列, 并取 $\varepsilon=1$. 由科犀条件可知, 存在

一正整数 n_0，使得对任意 $n>n_0$，x_n 必 1-邻近于 x_{n_0}。设

$$I=\{x: x_{n_0}-1\leqslant x\leqslant x_{n_0}+1\}$$

则 I 为 R 的一个紧致子集（第 8-5 节习题 5c），并且，由定理 6.2 可知，I 是完备的．而科犀点列 $(x_{n_0}, x_{n+1}, \cdots)$ 乃是在 I 中．因此这一点列的某一子列收敛至 I 中的某一点．所要的结果也就得出了．

我们曾经看到连通性与紧致性皆在连续变换作用下保存不变．这对完备性并不为真．事实上，正如下面例子所指出的，完备性甚至也不是一个拓扑概念．

例 6.4 令 R 为实数集合的距离空间，并令

$$I=\{x: -1<x<1\},$$

并且 I 中的距离定义为

$$d(x, y)=|x-y|,$$

则 R 为完备的（例 6.3）．但 I 不是完备的，因为点列 $(1-1/n)$ 为 I 中的一科犀点列，它不收敛至 I 中的点．但是，如果变换 $f: R\to I$ 定义为

$$f(x)=\frac{x}{|x|+1},$$

则 f 是一个同胚映射（习题 5）．由此，R 与 I 是拓扑等价空间，其中一个是完备的，而另一个不是完备的．由此可得完备性并不是一种拓扑性质．

我们有许多关于完备空间的重要定理．R 的完备性可判定存在一实数作为点列

$$(1.4, 1.41, 1.412, \cdots)$$

的极限．如果定义这一点列的第 n 项为其分母是 10^n，而此项平方小于 2 的最大有理数，则很容易证明，这一点列的极限之平方必为 2．再者，$\sqrt{2}$ 不是有理数．由此，R 的完备性蕴涵了无理数的

存在性.事实上,从有理数建造实数的一种标准方法是利用一种称为科犀点列的完备化的程序进行的。但我们在这里不去讨论它。

习题

1. 在距离空间 R 中,下列点列 (x_n) 中哪些是科犀点列?对每一科犀点列,求出它所收敛到的那一点.

   (a) $x_n = 1/n$,
   (b) $x_n = (-1)^n(1/n)$,
   (c) $x_n = 1 - 1(-1)^n(1/n)$,
   (d) $x_n = (-1)^n(1 - 1/n)$,
   (e) $x_n = n$,
   (f) $x_n = n^{10}/n!$,
   (g) $x_n = n/(n+1)$,
   (h) $x_n = n^2/(n+1)$,
   (i) $x_n = n/(n^2+1)$,
   (j) $x_n = \sin n$.

2. 下列 R 的子集中,哪些是完备的?

   (a) 由所有有理数所组成的集合,
   (b) 由所有无理数所组成的集合,
   (c) $I = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$,
   (d) $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$,
   (e) $T = \{2\}$,
   (f) 空集合 $\varnothing$.

3. (a) 证明一完备空间的每一闭子集皆为完备的.

   (b) 证明距离空间的每一完备子集皆为闭的.

4. 证明若 (x_n) 为距离空间 X 中的一科犀点列,并且如果 (x_n) 的某一子列收敛至一点 $x \in X$,则点列 (x_n) 收敛至 x.

5. 证明例 6.4 中的变换 $f: R \to I$ 为一同胚映射.

6. 定义 x_n 为其分母为 10^n,而此项平方小于 2 的最大有理数.

   (a) 证明 (x_n) 为科犀点列.

   (b) 证明科犀点列 (x_n) 所收敛到的那一点 x 满足方程式 $x^2 = 2$.